

OPÉRATEURS D'ENTRELACEMENT ET ALGÈBRES DE HECKE AVEC PARAMÈTRES D'UN GROUPE RÉDUCTIF p -ADIQUE - LE CAS DES GROUPES CLASSIQUES

VOLKER HEIERMANN

ABSTRACT. For G a symplectic or orthogonal p -adic group (not necessarily split), or an inner form of a general linear p -adic group, we compute the endomorphism algebras of some induced projective generators à la Bernstein of the category of smooth representations of G and show that these algebras are isomorphic to the semi-direct product of a Hecke algebra with parameters by a finite group algebra. Our strategy and parts of our intermediate results apply to a general reductive connected p -adic group.

RÉSUMÉ: Pour G un groupe symplectique ou orthogonal p -adique (déployé ou non) ou une forme intérieure d'un groupe linéaire p -adique, nous calculons les algèbres d'endomorphismes de certains générateurs projectifs induits à la Bernstein dans la catégorie des représentations lisses de G , et nous montrons que ces algèbres sont isomorphes au produit semi-direct de l'algèbre d'un groupe fini avec une algèbre de Hecke avec paramètres. Notre stratégie et une bonne partie des résultats intermédiaires s'appliquent à un groupe réductif connexe p -adique arbitraire.

Soient G (le groupe des points d') un groupe réductif connexe défini sur F , $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G et (σ, E) une représentation irréductible cuspidale de M . Notons $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ le groupe des caractères non ramifiés de M , \mathcal{O} l'ensemble des classes d'équivalence de représentations de la forme $\sigma \otimes \chi$, $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, et ${}^W\mathcal{O}$ l'orbite de \mathcal{O} pour l'action par le groupe de Weyl W de G .

Désignons par i_P^G le foncteur de l'induction parabolique normalisé, par r_P^G son adjoint à gauche et par $\text{Rep}({}^W\mathcal{O})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $\text{Rep}(G)$ des représentations lisses complexes de G dont les objets sont les représentations π qui vérifient la propriété suivante: l'ensemble des classes d'équivalence des sous-quotients irréductibles de $r_P^G \pi$ est contenu dans ${}^W\mathcal{O}$ si P' est associé à P , et il ne contient aucun sous-quotient irréductible cuspidal sinon.

Remarquons que $\text{Rep}(G)$ est le produit direct des sous-catégories $\text{Rep}({}^W\mathcal{O})$.

Notons M^1 l'intersection des noyaux des caractères non ramifiés de M et (σ_1, E_1) une composante irréductible de la restriction de σ à M^1 . Désignons par $\text{ind}_{M^1}^M$ le foncteur de l'induction compacte. Il a été montré par Bernstein [Ro, 1.6] que la

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

catégorie $\text{Rep}({}^W\mathcal{O})$ est isomorphe à la catégorie des $\text{End}_G(i_P^G \text{ind}_{M^1}^M E_1)$ -modules à droite. Remarquons que $\text{ind}_{M^1}^M E_1$ ne dépend pas du choix de (σ_1, E_1) . Cet isomorphisme de catégories est par ailleurs compatible avec l'induction parabolique et le foncteur de Jacquet [Ro, 2.4].

Nous nous proposons ici de déterminer l'algèbre $\text{End}_G(i_P^G \text{ind}_{M^1}^M E_1)$ plus explicitement. Nous nous restreignons pour cela au cas où G est un groupe symplectique ou orthogonal (déployé ou non) ou encore où G est une forme intérieure de $\text{GL}_n(F)$. Dans cette situation, nous donnons une base de cette algèbre en tant que module sur un anneau de fonctions régulières sur \mathcal{O} (cf. proposition 7.4) pour en déduire que cette algèbre est isomorphe au produit semi-direct d'une algèbre de Hecke avec paramètres (au sens de Lusztig [L]) avec l'algèbre d'un groupe fini (cf. théorème 7.7). Les paramètres possibles sont d'ailleurs bien connus dans le cas des groupes considérés ici (cf. 7.5). Nous finissons notre article avec quelques remarques disant que l'isomorphisme de catégories qui est déduit de notre isomorphisme d'algèbres est compatible avec l'induction parabolique et le foncteur de Jacquet (cf. 7.9).

En fait, les hypothèses dont nous avons besoin devraient également être vérifiées pour d'autres formes de ces groupes classiques. Par ailleurs, notre approche et une bonne partie des résultats intermédiaires sont générales. Certaines preuves ont d'ailleurs été motivées par l'obtention d'un résultat général et pourraient bien être simplifiées sous les hypothèses imposées dans ce papier.

Signalons que, dans le cas d'un groupe réductif p -adique arbitraire, il faudrait éventuellement remplacer l'algèbre de groupe de R par l'algèbre de groupe tordue par un 2-cocycle.

Rappelons que la théorie des représentations des algèbres de Hecke avec paramètres a été largement étudiée par Lusztig et d'autres.

Remarquons finalement qu'une autre approche pour obtenir les résultats de ce papier est une des motivations d'une théorie initiée par C. Bushnell et Ph. Kutzko [BK], appelée "théorie des types". Cette théorie donne des résultats dans ce sens pour les groupes considérés ici, mais qui ne sont complets que dans le cas d'une algèbre de division (C. Bushnell et Ph. Kutzko dans le cas déployé et V. Secherre dans le cas général) et encore partiels pour les formes déployées des groupes classiques considérés ici (Sh. Stevens). Après de longues considérations techniques difficiles et longues, cette théorie donne par contre en principe des résultats plus précis puisqu'elle permet de déterminer également les paramètres associés à une orbite inertielle \mathcal{O} . Ces paramètres sont toutefois maintenant connus pour les groupes classiques grâce à l'établissement de la correspondance de Arthur-Langlands pour les représentations cuspidales de ces groupes par C. Mœglin [M], comme déjà remarqué ci-dessus. Son travail fait suite aux résultats de J. Arthur sur les séries discrètes de ces groupes qui sont une conséquence de sa stabilisation de la formule des traces.

L'auteur remercie J.-L. Waldspurger pour lui avoir indiqué sur l'exemple de

SL_2 la possibilité de retrouver des algèbres de Hecke avec paramètres à partir d'opérateurs d'entrelacement. Il a également profité de discussions avec P. Schneider et E.-W. Zink sur différents aspects de cet article, et il remercie G. Henniart et J.-L. Waldspurger pour des remarques sur une version préliminaire de ce papier.

1. Nous gardons les hypothèses et notations de l'introduction. En outre, nous fixons un sous-groupe parabolique minimal P_0 contenu dans P , un sous-groupe de Levi M_0 de P_0 contenu dans M , $P_0 = M_0 U_0$, et un tore A_0 déployé maximal (sur F) de M_0 . Le tore déployé maximal contenu dans M sera désigné par A_M . Nous noterons $W = W^G$ le groupe de Weyl de G défini relatif à A_0 , et nous désignerons par K un sous-groupe compact maximal de G qui est en bonne position par rapport à A_0 . Par ailleurs, lorsque H est un groupe, nous écrirons $X(H)$ pour le groupe $\text{Hom}(H, \mathbb{C}^\times)$.

L'ensemble des racines non triviales de A_M dans l'algèbre de Lie de G sera désigné par $\Sigma(A_M)$, le sous-ensemble des racines qui agissent dans l'algèbre de Lie de U , par $\Sigma(P)$, et l'ensemble des racines réduites par $\Sigma_{red}(P)$. On a une bijection $\alpha \mapsto M_\alpha$ entre $\Sigma_{red}(P)$ et l'ensemble des sous-groupes de Levi de G qui contiennent M et qui sont minimaux pour cette propriété.

Par ailleurs, on désignera pas a_M l'algèbre de Lie réelle de A_M , par a_M^* son dual, par $a_{M,\mathbb{C}}^*$ son complexifié, par $|\cdot|_F$ le module de F , par q le cardinal du corps résiduel de F et par H_M l'application $M \rightarrow a_M$ qui vérifie $q^{-\langle H_M(m), \alpha \rangle} = |\alpha(m)|_F$ pour tout caractère rationnel α de M et tout $m \in M$. Si s est un nombre complexe, on note $\chi_{\alpha \otimes s}$ le caractère non ramifié $m \mapsto |\alpha(m)|^s$ de M . Cette application se prolonge en un homomorphisme de groupes $a_{M,\mathbb{C}}^* \rightarrow \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ qui est surjectif.

1.1 Nous noterons $W(M)$ l'ensemble des représentants dans W de longueur minimale dans leur classe à droite modulo W^M du groupe quotient $\{w \in W | w^{-1} M w = M\} / W^M$. Observons que $W(M)$ est un sous-groupe de W . Nous désignons par $W(M, \mathcal{O})$ le sous-groupe de $W(M)$ formé des éléments qui stabilisent \mathcal{O} .

Pour $w \in W(M, \mathcal{O})$, posons $l_M(w) := |\Sigma_{red}(P) \cap \Sigma_{red}(w \overline{P} w^{-1})|$. La longueur usuelle sur W sera désignée par l^G ou simplement l .

Proposition: *Pour que deux éléments w et w' de $W(M)$ vérifient $l_M(w w') = l_M(w') + l_M(w)$, il faut et il suffit que $l(w w') = l(w) + l(w')$.*

Preuve: Remarquons d'abord que, pour tout $w \in W(M)$, $w \Sigma_{red}(M \cap P_0) = \Sigma_{red}(M \cap P_0)$ et que $l(w) = |\Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w \overline{P}_0)|$. Il s'ensuit tout d'abord que $\Sigma^M(A_0) \cap \Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w \overline{P}_0) = \emptyset$. Donc, un élément α de $\Sigma(A_0)$ est dans $\Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w \overline{P}_0)$, si et seulement si $\alpha|_{A_M} \in \Sigma(P) \cap \Sigma(w \overline{P})$. Par suite, pour $w, w' \in W(M)$, $l_M(w w') = l_M(w) + l_M(w')$ équivaut à

$$|\Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w w' \overline{P}_0)| = |\Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w \overline{P}_0)| + |\Sigma_{red}(P_0) \cap \Sigma_{red}(w' \overline{P}_0)|,$$

d'où la proposition par l'expression pour $l(w)$ rappelée au début. \square

Pour tout $w \in W$, notons $P(w) = M(w)U(w)$ le sous-groupe parabolique standard minimal tel que $P, wP \subseteq P(w)$. (Si M_α est un sous-groupe de Levi standard et w l'élément non trivial de $W^{M_\alpha}(M)$, alors $M(w) = M_\alpha$.) On peut choisir des représentants \overline{w} des éléments de W dans G tels que $\overline{w} \in K \cap M(w)$, ce que l'on fera désormais. On identifiera dans la suite les éléments de W avec leurs représentants dans K . Il sera toujours clair d'après le contexte, si w désigne un élément de W ou de G , en faisant les conventions suivantes: pour $w, w' \in W$, le symbole ww' , considéré comme élément de K , désigne le produit du représentant de w dans K avec celui de w' et **non pas** le représentant de ww' . Par ailleurs, le symbole w^{-1} correspondra à l'inverse (du représentant) de w dans le groupe G qui est bien un élément de $K \cap M_w$.

Remarquons que notre construction d'opérateurs de $\text{End}_G(i_P^G E_B)$ sera essentiellement indépendante du choix de l'ensemble des représentants de W . On fera toutefois dans **1.15** quelques restrictions supplémentaires sur ces représentants.

Lorsque $P_1 = M_1 U_1$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G , (π, V) une représentation lisse de M_1 et $w \in W$, on désignera par $\lambda(w)$ l'isomorphisme $i_{P_1}^G V \rightarrow i_{wP_1}^G wV$, $v \mapsto v(w^{-1} \cdot)$. On peut également définir $\lambda(g)$ pour tout élément g de G . Si $g \in M_1$, alors $\lambda(g)$ est un isomorphisme $i_{P_1}^G V \rightarrow i_{P_1}^G gV$ qui est induit par fonctorialité de l'isomorphisme $\pi(g^{-1}) : V \rightarrow gV$. On écrira également $i_{P_1}^G(\pi(g^{-1}))$ (à ne pas confondre avec $i_P^G \pi(g^{-1})$).

1.2 La fonction μ de Harish-Chandra est par exemple définie dans [W, V.2]. Nous écrirons μ^H , si elle est définie sur \mathcal{O} par rapport à un sous-groupe réductif H de G qui contient M . Nous omettrons cet exposant, si $G = H$.

Théorème: ([Si, 5.4.2.2 et 5.4.2.3]) (Harish-Chandra) *Soit $\alpha \in \Sigma(P)$ et soit σ_1 une représentation irréductible cuspidale de M .*

a) Si $\mu^{M_\alpha}(\sigma_1) = 0$, alors il existe un unique élément non trivial s_α dans $W^{M_\alpha}(M)$ tel que $s_\alpha(P \cap M_\alpha) = \overline{P} \cap M_\alpha$ et $s_\alpha \sigma_1 \simeq \sigma_1$.

b) Supposons qu'il existe un unique élément non trivial s_α dans $W^{M_\alpha}(M)$ tel que $s_\alpha(P \cap M_\alpha) = \overline{P} \cap M_\alpha$ et $s_\alpha \sigma_1 \simeq \sigma_1$. Alors, pour que $\mu^{M_\alpha}(\sigma_1) \neq 0$, il faut et il suffit que la représentation $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} \sigma_1$ soit réductible. La représentation $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} \sigma_1$ est alors somme directe de deux représentations irréductibles non isomorphes.

1.3 Proposition: *L'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu} := \{\alpha \in \Sigma_{\text{red}}(A_M) \mid \mu^{M_\alpha} \text{ a un zéro}\}$ est un système de racines. Pour $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, désignons par s_α l'unique élément de $W^{M_\alpha}(M, \mathcal{O})$ qui conjugue $P \cap M_\alpha$ et $\overline{P} \cap M_\alpha$. Le groupe de Weyl $W_{\mathcal{O}}$ de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$ s'identifie au sous-groupe de $W(M, \mathcal{O})$ engendré par les réflexions s_α . Pour tout $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, notons α^\vee l'unique élément de $a_M^{M_\alpha}$ qui vérifie $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$. Alors $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}^\vee := \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}\}$ est l'ensemble des coracines de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, la dualité étant celle*

entre a_M et a_M^* .

L'ensemble $\Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$ est l'ensemble des racines positives pour un certain ordre sur $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$.

Preuve: La preuve de la première partie de la proposition est analogue à celle de la proposition 4.2 dans [H2] (voir également [Si]), après avoir vérifié que $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est stable pour l'action de $W(M, \mathcal{O})$. Ceci résulte de la $W(M, \mathcal{O})$ -invariance de la fonction μ de Harish-Chandra [W, V.2.1].

Soit $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$. Le sous-espace vectoriel de a_M^* engendré par α est $a_M^{M_\alpha^*}$. Celui-ci est l'orthogonal de a_{M_α} . Par suite, α^\vee doit appartenir à $a_M^{M_\alpha}$. Comme $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$, c'est donc bien la coracine.

La dernière assertion vient du simple fait que $\Sigma(P)$ définit un ordre sur $\Sigma_{red}(A_M)$, donc sur $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$. \square

1.4 Définition: On pose $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) = \Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, et on note $\Delta_{\mathcal{O}, \mu}$ la base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$ déterminée par l'ordre pour lequel l'ensemble des racines positives est $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P)$. La longueur sur $W_{\mathcal{O}}$ sera désignée par $l_{\mathcal{O}}$.

On fixe par ailleurs une représentation unitaire σ dont la classe d'équivalence appartient à \mathcal{O} telle que $\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}, \mu}$. (Ceci est possible, puisque $\Delta_{\mathcal{O}, \mu}$ est une base.)

1.5 Pour $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, fixons un élément h_α de $M \cap M_\alpha^1$ tel que $H_M(h_\alpha)$ soit un multiple de α^\vee par un nombre réel > 0 et que, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, $\chi(h_\alpha) = 1$ équivaut à $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$ (cf. [H2, 1.2]). Notons t_α le plus petit entier ≥ 1 tel que $\chi(h_\alpha^{t_\alpha}) = 1$ équivaut à $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha) \text{ Stab}(\mathcal{O})$. Notons b_{h_α} l'application $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi \mapsto \chi(h_\alpha)$, et posons $Y_\alpha = b_{h_\alpha}$ et $X_\alpha = Y_\alpha^{t_\alpha}$. (La raison pour cette notation double deviendra claire dans la section 2.)

Lemme: Pour $w \in W(M)$, on a ${}^w Y_\alpha = Y_{w\alpha}$. En particulier, ${}^{s_\alpha} Y_\alpha = Y_\alpha^{-1}$.

Preuve: La fonction Y_α ne dépend de h_α que par son image dans $a_M^{M_\alpha}$. Posons $H_M(h_\alpha) = m_\alpha \alpha^\vee$ avec $m_\alpha > 0$. Remarquons que $Y_\alpha = b_{h_\alpha}$ et donc ${}^w Y_\alpha = {}^w b_{h_\alpha} = b_{wh_\alpha w^{-1}}$. Comme $H_M(wh_\alpha w^{-1}) = m_\alpha (w\alpha^\vee)$, il reste à prouver que $m_\alpha = m_{w\alpha}$. Pour $\lambda \in a_{M, \mathbb{C}}^*$, la valeur de χ_λ en h_α est déterminée par la projection de λ sur $a_M^{M_\alpha^*}$. Il en est de même pour $h_{w\alpha}$. Comme, pour $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\chi_{\lambda(w\alpha)}(wh_\alpha w^{-1}) = {}^w \chi_{\lambda\alpha}(wh_\alpha w^{-1}) = \chi_{\lambda\alpha}(h_\alpha),$$

on a $\chi_{\lambda(w\alpha)}(wh_\alpha w^{-1}) = 1$ si et seulement, si $\chi_{\lambda\alpha} \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$. Mais, ceci équivaut à $\chi_{\lambda(w\alpha)} = {}^w \chi_{\lambda\alpha} \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_{w\alpha})$. Donc, $H_M(h_{w\alpha}) = H_M(wh_\alpha w^{-1})$, et, par suite, $m_\alpha = m_{w\alpha}$. \square

1.6 Le résultat suivant a été montré par A. Silberger [Si, 1.6] (voir également la remarque dans la preuve de la proposition 4.1 dans [H2]).

Proposition: *Soit $\alpha \in \Sigma_{red}(P)$ et $s = s_\alpha$. Si μ^{M_α} n'est pas constante, alors $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, et on peut trouver une constante $c'_s > 0$ et des nombres réels $a_s \geq 0$ et $b_s \geq 0$ tels que l'on ait l'identité de fonctions rationnelles*

$$\begin{aligned} & \mu^{M_\alpha}(\sigma \otimes \cdot) \\ &= c'_s \frac{(1 - X_\alpha(\cdot))(1 - X_\alpha^{-1}(\cdot))}{(1 - X_\alpha(\cdot)q^{-a_s})(1 - X_\alpha^{-1}(\cdot)q^{-a_s})} \frac{(1 + X_\alpha(\cdot))(1 + X_\alpha^{-1}(\cdot))}{(1 + X_\alpha(\cdot)q^{-b_s})(1 + X_\alpha^{-1}(\cdot)q^{-b_s})}. \end{aligned}$$

1.7 Remarque: Comme $\Delta_{\mathcal{O}, \mu}$ est linéairement indépendant, on peut choisir σ tel que, pour tout $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}, \mu}$, les nombres réels a_{s_α} et b_{s_α} de l'énoncé de la proposition ci-dessus vérifient $a_{s_\alpha} \geq b_{s_\alpha}$, ce que l'on supposera désormais. En particulier, $a_{s_\alpha} > 0$.

1.8 Lorsque $P' = MU'$ est un autre sous-groupe parabolique, notons $J_{P|P'}$ l'opérateur d'entrelacement défini dans [W, IV]. C'est un opérateur rationnel

$$\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(i_{P' \cap K}^K E, i_{P \cap K}^K E), \chi \mapsto J_{P|P'}(\sigma \otimes \chi)$$

qui induit en tout point régulier χ un homomorphisme entre les représentations $i_{P'}^G(\sigma \otimes \chi)$ et $i_P^G(\sigma \otimes \chi)$.

Lemme: *Soit $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}, \mu}$, $s = s_\alpha$, et supposons que M_α soit un sous-groupe de Levi standard de G . L'opérateur $J_{P|sP}$ est rationnel en Y_α . Les pôles de $J_{P|sP}$ sont précisément les zéros de μ^{M_α} . Tout pôle est d'ordre 1 et son résidu est bijectif. Par ailleurs, $J_{P|sP}J_{sP|P}$ est égal à $(\mu^{M_\alpha})^{-1}$ à multiplication par une constante non nulle près.*

Preuve: La propriété de rationalité résulte de [W, IV.1.1], en remarquant que $J_{P|sP}$ est invariant par $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$. Grâce à la propriété de fonctorialité que l'opérateur d'entrelacement vérifie relative à l'induction parabolique, on peut se ramener au cas où P est un sous-groupe parabolique maximal. Alors, $sP = \overline{P}$, et $J_{P|sP}J_{sP|P}$ est égal à μ^{-1} multiplié par une constante non nulle.

Soit σ_1 un pôle de $J_{P|\overline{P}}$. Alors, par [Si, 5.4.2.1], σ_1 est une représentation unitaire. Comme, d'après [W, V.2.3], l'opérateur $\mu J_{P|\overline{P}}$ est régulier en σ_1 , on a bien $\mu(\sigma_1) = 0$.

Réciproquement, supposons $\mu(\sigma_1) = 0$. Alors, comme $\mu^{-1} = J_{P|\overline{P}}J_{\overline{P}|P}$, au moins un des opérateurs $J_{P|\overline{P}}$ ou $J_{\overline{P}|P}$ doit avoir un pôle en σ_1 . Or, un tel pôle est au plus d'ordre 1 (cf. [W, IV.1.2]). Comme les pôles de μ^{-1} sont d'ordre 2, $J_{P|\overline{P}}$ doit avoir un pôle d'ordre 1.

Finalement, $\mu(\sigma) = 0$ implique par le théorème de Harish-Chandra **1.2** que $s\sigma \simeq \sigma$ et que $i_P^G \sigma$ et $i_{\overline{P}}^G \sigma$ sont irréductibles. Comme le résidu de $J_{P|\overline{P}}$ en σ est un opérateur d'entrelacement $i_P^G \sigma \rightarrow i_{\overline{P}}^G \sigma$, celui-ci doit être bijectif. \square

1.9 Soient $w, w' \in W$ et soient $P_{ww'}$, $P_{w'}$ des sous-groupes paraboliques standards de G de sous-groupes de Levi $ww'Mw'^{-1}w^{-1}$ et $w'Mw'^{-1}$ respectivement. Écrivons dans la suite $\mu_{P,w,w'}$ ou plus simplement $\mu_{w,w'}$ pour la fonction rationnelle sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ telle que $\mu_{w,w'}(\chi) = \prod_{\alpha} \mu^{M_{\alpha}}(\sigma \otimes \chi)$, le produit portant sur $\Sigma(P) \cap \Sigma(w'^{-1}\overline{P_{w'}}) \cap \Sigma(w'^{-1}w^{-1}P_{ww'})$. (Remarquons que $P_{w'} = P_{ww'} = P$, si $w, w' \in W(M, \mathcal{O})$.)

Proposition: Soient $w, w' \in W$. Alors, en tant que fonction rationnelle en $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$,

$$\begin{aligned} & \lambda(ww')J_{w'^{-1}w^{-1}P_{ww'}|P}(\sigma \otimes \chi) \\ &= \mu_{w,w'}(\chi)\lambda(w)J_{w^{-1}P_{ww'}|P_{w'}}(w'\sigma \otimes w'\chi)\lambda(w')J_{w'^{-1}P_{w'}|P}(\sigma \otimes \chi). \end{aligned}$$

Preuve: Ceci est une conséquence immédiate des règles de composition pour les opérateurs d'entrelacement [W]. \square

1.10 Proposition: Soit $P' = MU'$ un autre sous-groupe parabolique de Levi M . Si $\Sigma(P) \cap \Sigma(\overline{P'})$ a une intersection vide avec $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$, l'opérateur $J_{P'|P}$ est bien défini et bijectif en tout point de \mathcal{O} .

Preuve: Comme $J_{P'|P}$ se décompose en des opérateurs d'entrelacement élémentaires qui proviennent d'opérateurs d'entrelacement relatifs à des M_{α} , $\alpha \notin \Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$, on est ramené au cas où P est un sous-groupe parabolique maximal de G et $P' = \overline{P}$ avec μ constante. D'après [Si, 5.4.2.1], les pôles de $J_{\overline{P}|P}$ sont des représentations unitaires. Comme μ est constante et que l'opérateur $\mu J_{\overline{P}|P}$ est régulier en toute représentation unitaire de \mathcal{O} [W, V.2.3], $J_{\overline{P}|P}$ doit lui-même être régulier sur \mathcal{O} . Il est bijectif en tout point de \mathcal{O} , puisque μ ne s'annule pas. \square

1.11 Définition: On pose $R(\mathcal{O}) = \{w \in W(M, \mathcal{O}) | w\alpha \in \Sigma(P) \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O},\mu}\}$.

1.12 Proposition: Le groupe $R(\mathcal{O})$ est un sous-groupe de $W(M, \mathcal{O})$. On a $W(M, \mathcal{O}) = R(\mathcal{O}) \ltimes W_{\mathcal{O}}$.

Preuve: Posons $R = R(\mathcal{O})$. Comme $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$ est $W(M, \mathcal{O})$ -invariant (cf. preuve de **1.3**), R est par définition un sous-groupe de $W(M, \mathcal{O})$. Le groupe $W_{\mathcal{O}}$ est engendré par les symétries s_{α} , $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$. Comme $ws_{\alpha}w^{-1} = s_{w\alpha}$ et que $w\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O},\mu}$, $W_{\mathcal{O}}$ est

un sous-groupe distingué de $W(M, \mathcal{O})$. Comme $W_{\mathcal{O}}$ permute les chambres de Weyl dans $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, on a $W_{\mathcal{O}} \cap R = \{1\}$. Il reste à montrer que $W(M, \mathcal{O}) = RW_{\mathcal{O}}$.

Or, soit $w \in W(M, \mathcal{O})$. Alors, $w(\Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}) = \Sigma(wPw^{-1}) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$. Ceci est l'ensemble des racines positives dans $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$ pour un certain ordre sur $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$. Comme $W_{\mathcal{O}}$ permute transitivement les différents ordres sur $\Sigma_{\mathcal{O}}$, il existe $w' \in W_{\mathcal{O}}$ tel que $w'w(\Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}) = \Sigma(P) \cap \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, i.e. $w'w \in R$. \square

1.13 Proposition: *Supposons que G soit un groupe symplectique ou orthogonal, et notons $d = \text{rg}_F(G)$.*

a) En remplaçant σ par un autre élément de \mathcal{O} et en conjuguant (M, σ) par un élément de G , on peut supposer $M = \underline{M}(F)$ avec

$$\underline{M} = \text{GL}_{k_1} \times \cdots \times \text{GL}_{k_1} \times \text{GL}_{k_2} \times \cdots \times \text{GL}_{k_2} \times \cdots \times \text{GL}_{k_r} \times \cdots \times \text{GL}_{k_r} \times \underline{H}_k,$$

où \underline{H}_k désigne un groupe semi-simple de rang absolu k du même type que G , et

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_r \otimes \cdots \otimes \sigma_r \otimes \tau,$$

les classes inertielles des σ_i étant deux à deux distinctes, ainsi que $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$ si σ_i et σ_i^\vee sont dans une même orbite inertielle.

b) Notons d_i le nombre de facteurs égaux à σ_i et identifions $A_{\underline{M}}$ à $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^{d_1} \times \mathbb{G}_m^{d_2} \times \cdots \times \mathbb{G}_m^{d_r}$. Notons $\alpha_{i,j}$ le caractère rationnel de $A_{\underline{M}}$ (identifié à \mathbb{T}) qui envoie un élément $x = (x_{1,1}, \dots, x_{1,d_1}, x_{2,1}, \dots, x_{2,d_2}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,d_r})$ sur $x_{i,j} x_{i,j+1}^{-1}$, si $j < d_i$, et sur x_{i,d_i} , si $j = d_i$. Le système de racines $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$ est la somme directe de r composantes irréductibles ou vides $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$, $i = 1, \dots, r$, définies de la manière suivante:

Supposons d'abord ou $k \neq 0$ ou G de système de racine de type B_d .

(i) Si la fonction $s \mapsto \mu(\sigma_i | \det_{k_i}|^s \otimes \tau)$ (définie relativement à $\text{GL}_{k_i} \times \underline{H}_k$ et \underline{H}_{k_i+k}) a un pôle sur \mathbb{C} , alors une base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$ est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i}\}$, et ce système est de type B_{d_i} .

(ii) Si la fonction $s \mapsto \mu(\sigma_i | \det_{k_i}|^s \otimes \tau)$ (définie relativement à $\text{GL}_{k_i} \times \underline{H}_k$ et \underline{H}_{k_i+k}) est régulière sur \mathbb{C} et $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$, alors une base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$ est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i-1}, \alpha_{i,d_i-1} + 2\alpha_{i,d_i}\}$, et ce système est de type D_{d_i} .

(iii) Sinon, une base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$ est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i-1}\}$, et ce système est de type A_{d_i-1} .

Supposons maintenant $k = 0$ et ou G de système de racines de type C_d ou G de système de racines de type D_d et $k_i \geq 2$. Alors, dans le cas (i) ci-dessus, une base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$ est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, 2\alpha_{i,d_i}\}$, et le système est de type C_{d_i} . Dans les autres cas, la situation reste inchangée.

Supposons finalement $k = 0$, G de système de racines de type D_d et $k_i = 1$. Alors, si $\sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$, une base de $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu, i}$ est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i-1}, \alpha_{i,d_i-1} + 2\alpha_{i,d_i}\}$ et ce système est de type D_{d_i} . Sinon, le système est de type A_{d_i-1} et une base est donnée par $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i-1}\}$.

Preuve: Le fait que les sous-groupes de Levi de G ont la forme indiquée est bien connue. Par permutation des facteurs, on met σ dans la forme voulue. Supposons qu'il existe un caractère non ramifié χ_i de GL_{k_i} tel que $\sigma_i^\vee \simeq \sigma_i \otimes \chi_i$. On peut écrire $\chi_i = |\det_{k_i}|_F^{s_i}$, où s_i est un nombre complexe. Posons $\chi_i^{1/2} = |\det_{k_i}|^{s_i/2}$. Alors $(\sigma_i \otimes \chi_i^{1/2})^\vee \simeq \sigma_i^\vee \otimes \chi_i^{-1/2} \chi_i = \sigma_i \otimes \chi_i^{1/2}$.

Identifions $A_{\underline{M}}$ au tore \mathbb{T} , écrivons $x = (x_{1,1}, \dots, x_{1,d_1}, x_{2,1}, \dots, x_{2,d_2}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,d_r})$ pour l'élément général de \mathbb{T} et examinons les différents cas de figure.

Supposons d'abord ou $k \neq 0$ ou G de système de racines de type B_d . Les racines réduites dans $\Sigma(A_M)$ sont alors $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 1} x_{i',j'}^{\pm 1}$, $(i,j) \neq (i',j')$, ainsi que $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 1}$. (Comme $k \neq 0$, il existe bien dans le cas d'un système de racines de type C_d ou D_d des racines de restriction à A_M égale à $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 1}$.) Si $\alpha \in \Sigma(A_M)$ correspond à une racine $x \mapsto x_{i,j} x_{i',j'}^{-1}$, $(i,j) \neq (i',j')$, alors la fonction μ^{M_α} est égale à celle définie à partir de la représentation $\sigma_i \otimes \sigma_{i'}$ du sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_{k_i} \times \mathrm{GL}_{k_{i'}}$ de $\mathrm{GL}_{k_i+k_{i'}}$. Si $\alpha \in \Sigma(A_M)$ correspond à une racine $x \mapsto x_{i,j} x_{i',j'}$, $(i,j) \neq (i',j')$, $i \leq i'$, alors la fonction μ^{M_α} est égale à celle définie à partir de la représentation $\sigma_i \otimes \sigma_{i'}^\vee$ du sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_{k_i} \times \mathrm{GL}_{k_{i'}}$ de $\mathrm{GL}_{k_i+k_{i'}}$. Dans les autres cas, la fonction μ^{M_α} est celle définie par la représentation $\sigma_i \otimes \tau$ du sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_{k_i} \times H_m$ de H_{m+k_i} . Selon les différents cas présentés dans (i), (ii) et (iii), on déduit alors du théorème de Harish-Chandra 1.2 et des résultats de Bernstein-Zelevinsky [BZ] le résultat indiqué.

Pour $k = 0$ et G de système de racines de type C_d , les racines réduites dans $\Sigma(A_M)$ sont $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 1} x_{i',j'}^{\pm 1}$, $(i,j) \neq (i',j')$, ainsi que $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 2}$. On conclut alors comme ci-dessus.

Pour $k = 0$ et G de système de racines de type D_d finalement, les racines réduites dans $\Sigma(A_M)$ sont $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 1} x_{i',j'}^{\pm 1}$, $(i,j) \neq (i',j')$, ainsi que, si $k_i \geq 2$, $x \mapsto x_{i,j}^{\pm 2}$. On conclut alors comme ci-dessus, en tenant compte du fait que la fonction μ est bien connue pour les groupes déployés de rang 1. \square

1.14 Proposition: *Supposons que G soit le groupe des points rationnels d'une forme intérieure de GL_n , i.e. $G = \mathrm{GL}_n(D)$, où D est une algèbre à division de centre F .*

En remplaçant σ par un autre élément de \mathcal{O} et en conjuguant (M, σ) par un élément de G , on peut supposer M égal à

$$\mathrm{GL}_{k_1}(D) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{k_1}(D) \times \mathrm{GL}_{k_2}(D) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{k_2}(D) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{k_r}(D) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{k_r}(D)$$

et

$$\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_2 \otimes \cdots \otimes \sigma_r \otimes \cdots \otimes \sigma_r,$$

les classes inertielles des σ_i étant deux à deux distinctes.

Notons d_i le nombre de facteurs égaux à σ_i et identifions $A_{\underline{M}}$ à $\mathbb{T} = \mathbb{G}_m^{d_1} \times \mathbb{G}_m^{d_2} \times \cdots \times \mathbb{G}_m^{d_r}$. Notons $\alpha_{i,j}$ le caractère rationnel de $A_{\underline{M}}$ (identifié à \mathbb{T}) qui envoie un

élément $x = (x_{1,1}, \dots, x_{1,d_1}, x_{2,1}, \dots, x_{2,d_2}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,d_r})$ sur $x_{i,j} x_{i,j+1}^{-1}$. Le système des racines $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$ est la somme directe de r composantes irréductibles ou vides $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$, $i = 1, \dots, r$, de type A_{d_i-1} et de base $\{\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,d_i-1}\}$ respectivement.

Preuve: Pour G déployé, ceci résulte des travaux de Bernstein-Zelevinsky [BZ] avec le théorème de Harish-Chandra 1.2. Dans le cas général, on le déduit des travaux de Bernstein-Zelevinsky avec la formule des traces [DKV, T]. \square

1.15 Proposition: (i) Si G est un groupe linéaire ou le groupe multiplicatif d'une algèbre à division, alors $R(\mathcal{O}) = 1$.

(ii) Sinon, $R(\mathcal{O}) \neq 1$, si et seulement si les conclusions du (ii) de la proposition 1.13 sont vérifiées pour au moins un indice i avec, si G est de type D_n , de plus k_i pair ou bien $H \neq 1$ et τ invariant par l'automorphisme extérieur. Le groupe $R(\mathcal{O})$ est alors le produit direct des groupes $R(\mathcal{O})_i$ indexés par les i pour lesquels les conclusions ci-dessus sont vérifiées avec $R(\mathcal{O})_i = \{1, s_{\alpha_{i,d_i}}\}$ ($s_{\alpha_{i,d_i}}$ échangeant α_{i,d_i-1} et $\alpha_{i,d_i-1} + 2\alpha_{i,d_i}$ et vérifiant $s_{\alpha_{i,d_i}} \sigma_i \simeq \sigma_i^\vee$).

Preuve: Il est facile de voir que les conditions du théorème 1.2 sont réunies exactement dans les cas décrits dans l'énoncé, en prenant en compte [BJ, 3.4] pour les groupes de type D_n . \square

La proposition 1.15 ainsi que la proposition 1.12 nous conduisent à ajouter les deux hypothèses suivantes sur le choix des représentants des éléments de $W(M, \mathcal{O})$: concernant les représentants des éléments dans $R(\mathcal{O})$, on suppose que, si r est un produit d'élément s_{α_i} dans $R(\mathcal{O})_i$ deux à deux distincts dans $R(\mathcal{O})$, alors il en est ainsi pour les représentants. Concernant un élément arbitraire w de $W(M, \mathcal{O})$, on suppose que, si $w = w_{\mathcal{O}} r$ avec $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}}$ et $r \in R(\mathcal{O})$, alors le représentant de w est le produit de celui de $w_{\mathcal{O}}$ avec celui de r .

1.16 La proposition suivante est un cas particulier d'un résultat bien connu pour les groupes finis [He, Lemme 7.5]. Remarquons qu'elle n'est probablement pas valable pour un groupe réductif arbitraire sur F .

Proposition: Soit (σ_1, E_1) une composante irréductible de $\sigma|_{M^1}$. Alors σ_1 se prolonge en une représentation σ_2 de $M^\sigma = \{m \in M \mid {}^m \sigma_1 \simeq \sigma_1\}$ telle que $\sigma|_{M^\sigma} = \bigoplus_{m \in M/M^\sigma} {}^m \sigma_2$. En particulier, $\sigma = \text{Ind}_{M^\sigma}^M \sigma_2$ et ${}^m \sigma_2 \not\simeq \sigma_2$ si $m \notin M^\sigma$. Par ailleurs, $\sigma|_{M^1}$ est somme directe de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

Preuve: Nous allons d'abord supposer A_M de rang 1. Remarquons d'abord que, si H est un sous-groupe ouvert fermé d'indice fini d'un groupe localement profini

G , alors $\text{ind}_H^G = \text{Ind}_H^G$ et, comme dans le cas des groupes finis, une représentation (σ, E) est induite par une représentation (σ_2, E_1) , si et seulement si $V = \bigoplus_{g \in G/H} \sigma(g)E_1$.

Observons maintenant que $A_M \subseteq M^\sigma$. Le quotient M/M^σ est donc un groupe commutatif fini. Comme σ est cuspidale, on peut écrire $E = E_{\sigma_1} \oplus E'$ de sorte que E_{σ_1} soit somme directe de représentations isomorphes à σ_1 et qu'aucun sous-quotient de E' ne soit isomorphe à σ_1 [BZ, 2.44]. Le groupe M^σ agit donc dans E_{σ_1} , et on a $E = \bigoplus_{m \in M/M^\sigma} \sigma(m)E_{\sigma_1}$. Par suite, par la remarque ci-dessus, $\text{Ind}_{M^\sigma}^M E_{\sigma_1} = E$. Comme E est irréductible, la représentation de M^σ dans E_{σ_1} doit être irréductible. On va maintenant montrer qu'en fait $E_{\sigma_1} = E_1$.

Voyons d'abord que σ_1 se prolonge en une représentation irréductible σ_2 de M^σ . D'abord, σ_1 se prolonge en une représentation irréductible $\tilde{\sigma}_1$ de $A_M M$, donnée par $am \mapsto \chi_\sigma(a)\sigma_1(m)$, χ_σ désignant le caractère central de σ . Comme le quotient $M^\sigma/A_M M^1$ est par hypothèse un groupe cyclique fini, il est alors facile de définir un prolongement à M^σ . (Étant donné un élément m' de M^σ dont l'image engendre le groupe quotient cyclique $M^\sigma/A_M M^1$, on peut toujours trouver un isomorphisme $A_M M^1$ -équivariant $\varphi_{m'} : E_1 \rightarrow m'^{-1}E_1$ tel que $m'^i m \mapsto \varphi_{m'}^i \tilde{\sigma}_1(m)$ pour $m \in A_M M^1$ donne le prolongement voulu.)

Montrons maintenant que $\text{Ind}_{A_M M^1}^{M^\sigma} \tilde{\sigma}_1 = \bigoplus_{\chi \in X(M^\sigma/A_M M^1)} \sigma_2 \otimes \chi$. Les représentations $\sigma_2 \otimes \chi$, $\chi \in X(M^\sigma/A_M M^1)$ sont deux à deux non isomorphes, puisque tout isomorphisme $\sigma_2 \otimes \chi \mapsto \sigma_2 \otimes \chi'$ induit un automorphisme de $\tilde{\sigma}_1$ et, par le lemme de Schur, il serait donc scalaire, ce qui est impossible. Par la réciprocity de Frobenius, les sous-représentations irréductibles de $\text{Ind}_{A_M M^1}^{M^\sigma} \tilde{\sigma}_1$ sont les représentations irréductibles de M^σ de restriction à $A_M M^1$ égale à $\tilde{\sigma}_1$ et leur multiplicité est 1. Or, les arguments de la preuve de [BZ, 3.29] montrent que toute représentation irréductible de M^σ de restriction à $A_M M^1$ égale à $\tilde{\sigma}_1$ est isomorphe à $\sigma_2 \otimes \chi$ pour un $\chi \in X(M^\sigma/A_M M^1)$. Comme $\text{Ind}_{A_M M^1}^{M^\sigma} \tilde{\sigma}_1$ est unitaire, puisque $\tilde{\sigma}_1$ l'est, on a bien la décomposition indiquée.

Il s'ensuit que $E_{\sigma_1} = E_1$: la représentation ρ de M^σ dans E_{σ_1} est irréductible, de restriction égale à un multiple de σ_1 . La réciprocity de Frobenius donne donc $\text{Hom}_M(\rho, \text{Ind}_{A_M M^1}^{M^\sigma} \tilde{\sigma}_1) \neq 0$, ce qui implique que ρ est isomorphe à $\sigma_2 \otimes \chi$ pour un $\chi \in X(M^\sigma/A_M M^1)$. Par suite, $E_{\sigma_1} = E_1$ et on peut supposer dans la suite que $\rho = \sigma_2$.

Il en résulte, en remarquant que M^σ est distingué dans M , que $\sigma = \text{Ind}_{M^\sigma}^M \sigma_2$ et $\sigma|_{M^\sigma} = \bigoplus_{m \in M/M^\sigma} {}^m \sigma_2$. Comme σ est irréductible, les ${}^m \sigma_2$ sont deux à deux non isomorphes. Comme par ailleurs $({}^m \sigma_2)|_{M^1} = {}^m \sigma_1$ avec m parcourant un système de représentants de M/M^σ , $\sigma|_{M^1}$ est somme directe de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.

Supprimons maintenant l'hypothèse que A_M est de rang 1. Comme G est un groupe symplectique ou orthogonal, ou le groupe multiplicatif d'une algèbre simple, M est de la forme $\text{GL}_{m_1}(D) \times \cdots \times \text{GL}_{m_r}(D) \times H$, où D est une algèbre à division

de centre F et où H est un groupe semi-simple du même type que G ou le groupe trivial. On en déduit que M^1 est de la forme $\mathrm{GL}_{m_1}(D)^1 \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(D)^1 \times H$, que σ est isomorphe à un produit $\sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r \otimes \tau$ avec σ_i, τ des représentations cuspidales, et que M^σ est de la forme $\mathrm{GL}_{m_1}(D)^{\sigma_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_r}(D)^{\sigma_r} \times H$. On est donc ramené au cas où $M = \mathrm{GL}_m(D)$. Mais, alors A_M est de rang 1, et l'assertion est vraie par ce qui précédait. \square

1.17 Lorsque χ est un caractère non ramifié de M , notons E_χ l'espace E muni de la représentation $\sigma \otimes \chi$.

Corollaire: (avec les notations de la proposition 1.16) *On a $\mathrm{Stab}(\mathcal{O}) = X(M/M^\sigma)$ et, pour tout $\chi \in X(M/M^\sigma)$, l'application $\phi_{\sigma, \chi} : E \rightarrow E_\chi$ qui envoie un élément $e \in \sigma(m)E_1$ sur $\chi(m)e$ est un isomorphisme.*

Preuve: Soit $\chi \in \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$ tel que $\sigma \otimes \chi \simeq \sigma$. Alors, il existe $m \in M$ tel que $\sigma_2 \otimes \chi \simeq {}^m \sigma_2$. Par suite, $\sigma_1 \simeq (\sigma_2 \otimes \chi)|_{M^1} \simeq ({}^m \sigma_2)|_{M^1} = {}^m \sigma_1$, i.e. on a $m \in M^\sigma$ et donc $\sigma_2 \otimes \chi \simeq \sigma_2$. Soit φ_χ un automorphisme de E_1 qui entrelace $\sigma_2 \otimes \chi$ et σ_2 . Alors il entrelace σ_1 avec lui-même, i.e. φ_χ est la multiplication par un scalaire. Il s'ensuit que $\chi|_{M^\sigma} \equiv 1$. Donc $\mathrm{Stab}(\mathcal{O}) \subseteq X(M/M^\sigma)$. Inversement, c'est une vérification immédiate que pour tout $\chi \in X(M/M^\sigma)$ les applications $\phi_{\sigma, \chi}$ définissent des isomorphismes entre σ et $\sigma \otimes \chi$. \square

2. Notons $B = B_M$ l'anneau des polynômes sur la variété affine complexe $\mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M)$. C'est un anneau intègre, et on désignera par $K(B)$ son corps des fractions.

Écrivons E_B (resp. $E_{K(B)}$) pour l'espace vectoriel complexe $E \otimes_{\mathbb{C}} B$ (resp. $E_B \otimes_B K(B) \simeq E \otimes_{\mathbb{C}} K(B)$). Munissons-le de l'action de M donnée par $\sigma_B : M \rightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(E_{K(B)})$, $\sigma_B(m)(e \otimes b) := \sigma(m)e \otimes b b_m$. Ici, $b_m : \mathfrak{X}^{\mathrm{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}$ est défini par $b_m(\chi) = \chi(m)$.

Par restriction à K , l'espace $i_P^G E_B$ (resp. $i_P^G E_{K(B)}$) est isomorphe à $i_{K \cap P}^K E \otimes_{\mathbb{C}} B$ (resp. $i_{K \cap P}^K E \otimes_{\mathbb{C}} K(B)$). On identifie ainsi $i_{K \cap P}^K E$ à son image dans $i_P^G E_B$ (resp. $i_P^G E_{K(B)}$) par l'homomorphisme canonique $v \mapsto v \otimes 1$.

2.1 Remarquons d'abord que E_B est canoniquement isomorphe à $\mathrm{ind}_{M^1}^M E$. En effet, notons $\mathcal{R}(M/M^1)$ un système de représentants de M/M^1 . On obtient un isomorphisme canonique entre B et $\mathrm{ind}_{M^1}^M \mathbb{C} = \mathbb{C}[M/M^1]$, en envoyant un élément de la forme b_m , $m \in \mathcal{R}(M/M^1)$, sur l'application $M \rightarrow \mathbb{C}$ qui vaut 1 sur $m^{-1}M^1$ et 0 en dehors de cet ensemble. Identifions ces deux espaces à l'aide de cet isomorphisme. On a un isomorphisme canonique $E \otimes \mathrm{ind}_{M^1}^M \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{ind}_{M^1}^M E|_{M^1}$, en envoyant $e \otimes b$ sur l'application $v_{e \otimes b}$ dans $\mathrm{ind}_{M^1}^M E|_{M^1}$ qui envoie m sur $b(m)\sigma(m)e$. L'isomorphisme réciproque est donné par $\mathrm{ind}_{M^1}^M E|_{M^1} \rightarrow E \otimes \mathrm{ind}_{M^1}^M \mathbb{C}$, $v \mapsto \sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m^{-1}) v(m) \otimes b_{m^{-1}}$. (Ici, $b_{m^{-1}}$ est considéré comme élément de $\mathrm{ind}_{M^1}^M \mathbb{C}$ au moyen de l'isomorphisme ci-dessus.)

2.2 Pour $w \in W^G$, notons wE_B (resp. $wE_{K(B)}$) l'espace E_B (resp. $E_{K(B)}$) muni de la représentation $w\sigma_B$ de wMw^{-1} . (On a donc $w\sigma_B(wmw^{-1}) = \sigma_B(m)$.) Notons τ_w l'automorphisme de \mathbb{C} -espace vectoriel de $E \otimes_{\mathbb{C}} K(B)$ qui envoie $e \otimes b$ sur $e \otimes {}^wb$, ${}^wb(\chi) := b(w^{-1}\chi)$. (On a donc ${}^wb_m = b_{wmw^{-1}}$ pour $m \in M$.) Il définit un isomorphisme M -équivariant entre $wE_{K(B)}$ et $(wE)_{K(B)}$ et l'on notera encore τ_w l'isomorphisme G -équivariant $i_P^G w(E_{K(B)}) \rightarrow i_P^G (wE)_{K(B)}$ qui en est déduit par fonctorialité.

2.3 Pour $b \in K(B)$, notons b_χ l'élément de $K(B)$ donné par $b_\chi(\chi') = b(\chi\chi')$. On a $(b_m)_\chi = \chi(m)b_m$. Le résultat suivant est une vérification directe:

Lemme: Soit $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ et notons E_χ l'espace E muni de la représentation $\sigma \otimes \chi$ de M . L'application $\rho_\chi : E \otimes_{\mathbb{C}} B \rightarrow E_\chi \otimes_{\mathbb{C}} B$, $e \otimes b \mapsto e \otimes b_\chi$, définit un isomorphisme entre ces représentations lisses de M . On a $\rho_\chi^{-1} = \rho_{\chi^{-1}}$ et $\tau_w \circ \rho_\chi = \rho_{w\chi} \tau_w$.

2.4 Nous allons définir pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$ un isomorphisme $\rho_w : i_P^G wE \rightarrow i_P^G E$ qui envoie $i_P^G (wE)_B$ sur $i_P^G E_B$. Pour cela, posons

$$\rho_w = [(((\prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w^{-1}\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})} (Y_\alpha(\chi) - 1))\lambda(w)J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi))|_{\chi=1})^{-1},$$

si cette expression est bien définie. On écrira $\rho_{\sigma, w}$, si on veut souligner la dépendance de σ . Il est par ailleurs clair que les opérateurs $\rho_{\sigma, w}$ et τ_w commutent.

Proposition: L'application ρ_w provient d'un isomorphisme $wE \simeq E$, et il définit pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$ un isomorphisme $i_P^G wE \rightarrow i_P^G E$. Il vérifie les propriétés de compatibilité suivantes: pour tout $w' \in W$ avec $w'Mw'^{-1}$ égal au sous-groupe de Levi standard d'un sous-groupe parabolique standard $P_{w'}$ de G , ρ_w induit un isomorphisme $i_{P_{w'}}^G (w'wE)_{K(B)} \rightarrow i_{P_{w'}}^G (w'E)_{K(B)}$, et on a la formule de commutation

$$\lambda(w')J_{w'^{-1}P_{w'}|P}(\sigma \otimes \cdot)\rho_w = \rho_w\lambda(w')J_{w'^{-1}P_{w'}|P}(w\sigma \otimes \cdot).$$

Par ailleurs, pour $w' \in W_{\mathcal{O}}$, on a, avec w'' égal au représentant de ww' dans K ,

$$\rho_w \rho_{w'} = (\mu_{w, w'} \prod_{\alpha} (Y_\alpha - 1)^{-1} (Y_\alpha^{-1} - 1)^{-1})|_{\chi=1} \lambda(w''(ww')^{-1}) \rho_{ww'},$$

le produit portant sur l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1}\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P}) \cap w'^{-1}w^{-1}\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P)$, ainsi que, pour $r \in R(\mathcal{O})$ et s_α une réflexion simple dans $W_{\mathcal{O}}$,

$$\rho_{r\sigma, s_\alpha} = \lambda(rs_\alpha r^{-1} s_{r\alpha}^{-1}) \rho_{\sigma, s_\alpha}.$$

Preuve: Supposons d'abord $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O},\mu}$. Alors, $\mu^{M_\alpha}(\sigma) = 0$, et il résulte du théorème de Harish-Chandra **1.2** que $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} \sigma$ est irréductible et que $s_\alpha \sigma \simeq \sigma$.

Si M_α est standard, on déduit de **1.8** que l'opérateur $J_{s_\alpha P|P}$ considéré comme fonction rationnelle en Y_α a un pôle d'ordre 1 en $Y_\alpha = 1$ et que l'opérateur $\text{Res}_{Y_\alpha=1}(\lambda(s_\alpha)J_{s_\alpha P|P}(\sigma \otimes (\cdot))) : i_P^G \sigma \rightarrow i_P^G s_\alpha \sigma$ est bijectif. Par suite, ρ_{s_α} est bien défini et bijectif. Il est induit par fonctorialité par un isomorphisme entre les représentations irréductibles $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} s_\alpha \sigma$ et $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} \sigma$. Or, un tel isomorphisme est, par le lemme de Schur, uniquement déterminé à une constante près. En conséquence, ρ_{s_α} est lui-même induit par fonctorialité par un isomorphisme $s_\alpha \sigma \rightarrow \sigma$. Les deux propriétés de compatibilité en résultent par la propriété de fonctorialité pour les opérateurs d'entrelacement.

Si M_α n'est pas standard, alors ou α est contenue dans une composante irréductible de type D_{d_i} de $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$, et il existe par **1.15** un élément $r \in R(\mathcal{O})$ tel que $\alpha = r\beta$ avec $\beta \in \Delta_{\mathcal{O},\mu}$, M_β standard et $r\sigma \simeq \sigma$, ou bien cette composante irréductible est de type B_{d_i} ou C_{d_i} et α est la racine courte (resp. longue).

Dans le premier cas, suivant **1.9**, on décompose

$$\begin{aligned} & \lambda(s_\alpha)J_{s_\alpha P|P}(\sigma \otimes \chi) \tag{#} \\ &= \mu_{r,s_\beta r^{-1}}(\chi)\mu_{s_\beta,r^{-1}}(\chi)\lambda(s_\alpha r s_\beta^{-1} r^{-1})\lambda(r)J_{r^{-1}P|P}(s_\beta r^{-1}\sigma \otimes s_\beta r^{-1}\chi) \times \\ & \quad \times \lambda(s_\beta)J_{s_\beta P|P}(r^{-1}\sigma \otimes r^{-1}\chi)\lambda(r^{-1})J_{rP|P}(\sigma \otimes \chi). \end{aligned}$$

On a $\Sigma(P) \cap \Sigma(r\overline{P}) \cap \Sigma(rs_\beta P) = \emptyset$, puisque $r\beta \in \Sigma(P)$ et $\Sigma(P) \cap \Sigma(s_\beta \overline{P}) = \{\beta\}$. La fonction $\mu_{s_\beta,r}$ est donc constante. De même, l'ensemble $\Sigma(P) \cap \Sigma(rs_\beta \overline{P}) \cap \Sigma(s_\alpha P)$ a une intersection vide avec $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$, ce qui montre que $\mu_{r,s_\beta r^{-1}}$ est constante. Comme $r\sigma \simeq \sigma$ et que $J_{rP|P}(\sigma \otimes \chi)$ est d'après **1.10** bien défini et bijectif pour tout χ , on voit, en appliquant ce qui précède à $\rho_{r^{-1}\sigma, s_\beta}$ et en utilisant l'égalité ${}^r X_\beta = X_\alpha$ (cf. **1.5**), que l'opérateur ρ_{s_α} est bien défini et bijectif. Comme ρ_{s_β} est induit par fonctorialité d'un isomorphisme $s_\beta E \rightarrow E$, on en déduit de même pour ρ_{s_α} , après avoir appliqué les propriétés de compatibilité de ρ_{s_β} à la formule de décomposition pour $\rho_{s_\alpha}^{-1}$ ci-dessus. Les propriétés de compatibilité pour ρ_{s_α} en résultent.

Si M_α n'est pas standard et α appartient à une composante irréductible de type B_{d_i} ou C_{d_i} , alors notons w l'élément de longueur minimale dans W qui envoie un élément x dans A_M sur l'élément de A_0 déduit de x , en échangeant les composantes $(x_{i,1}, \dots, x_{i,d_i})$ et $(x_{r,1}, \dots, x_{r,d_r})$. Le groupe wMw^{-1} est alors un sous-groupe de Levi standard de G et la racine $\beta = w\alpha$ de $A_{wMw^{-1}}$ est dans $\Delta_{w\mathcal{O},\mu}$ avec $(wMw^{-1})_\beta$ standard. Notons P_w le sous-groupe parabolique standard de G de sous-groupe de Levi wMw^{-1} . Les racines dans $\Sigma_{\text{red}}(P) \cap \Sigma_{\text{red}}(w^{-1}\overline{P_w})$ sont de la forme $x \mapsto x_{i,j_1}x_{i_2,j_2}^{-1}$ avec $i < i_2 \leq r$ et $x \mapsto x_{i_1,j_1}x_{r,j_2}^{-1}$ avec $i \leq i_1 < r$. L'intersection avec $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$ est donc vide. Il en est de même pour celle de $w(\Sigma_{\text{red}}(P) \cap \Sigma_{\text{red}}(w^{-1}\overline{P_w}))$ avec $\Sigma_{s_\beta w\mathcal{O},\mu}$. En conséquence, les opérateurs $\lambda(w)J_{w^{-1}P_w|P}(\sigma)$

et $\lambda(w^{-1})J_{wP|P_w}(s_\beta w\sigma)$ sont d'après **1.10** bien définis et bijectifs. Les fonctions $\mu_{w^{-1},s_\beta w}$ et $\mu_{s_\beta,w}$ sont constantes. Par la formule de décomposition **1.9**, on trouve donc, en tant que fonction rationnelle en χ ,

$$\begin{aligned} & \lambda(s_\alpha)J_{s_\alpha P|P}(\sigma \otimes \chi) \\ &= \mu_{w^{-1},s_\beta w} \mu_{s_\beta,w} \lambda(s_\alpha w^{-1} s_\beta^{-1} w) \times \\ & \quad \times \lambda(w^{-1})J_{wP|P_w}(s_\beta w(\sigma \otimes \chi)) \lambda(s_\beta)J_{s_\beta P_w|P_w}(w(\sigma \otimes \chi)) \lambda(w)J_{w^{-1}P_w|P}(\sigma \otimes \chi). \end{aligned}$$

Comme $Y_\beta({}^w\chi) = {}^{w^{-1}}Y_\beta(\chi) = Y_\alpha(\chi)$, il en résulte

$$\rho_{\sigma,s_\alpha} = \mu_{w^{-1},s_\beta w} \mu_{s_\beta,w} \lambda(w^{-1})J_{wP|P_w}(s_\beta w\sigma) \lambda(s_\beta) \rho_{w\sigma,s_\beta} \lambda(w)J_{w^{-1}P_w|P}(\sigma),$$

i.e., suite à ce qui a été préalablement établi pour $\rho_{w\sigma,s_\beta}$, $\rho_{\sigma,s_\alpha}^{-1}$ est bien défini et bijectif. En fait, on déduit des propriétés de compatibilités pour $\rho_{w\sigma,s_\beta}$ que ρ_{σ,s_α} est un produit de $\rho_{w\sigma,s_\beta}$ par un scalaire non nul. Comme $s_\alpha E = w^{-1}s_\beta(wE)$, les propriétés de compatibilité pour ρ_{σ,s_α} sont immédiates.

La dernière assertion de la proposition résulte directement de la décomposition (#) pour $r \in R(\mathcal{O})$, après l'avoir multipliée avec $X_\alpha - 1$, évaluée en 1 et après avoir utilisé l'égalité ${}^rX_\beta = X_\alpha$.

Supposons maintenant avoir montré l'égalité

$$(*) \quad \rho_{w'}^{-1} \rho_w^{-1} = (\mu_{w',w'}^{-1} \prod_{\alpha} (Y_\alpha - 1)(Y_\alpha^{-1} - 1))|_{\chi=1} \lambda(ww'w''^{-1}) \rho_{ww'}^{-1}.$$

avec $w'' = ww'$, lorsque w, w' sont des éléments dans $W_{\mathcal{O}}$ tels que ρ_w et $\rho_{w'}$ soient bien définis, bijectifs et tels que $\rho_{w'}$ vérifie les deux propriétés de compatibilité, le produit portant sur l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P) \cap w'^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(\overline{P}) \cap w'^{-1}w^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$.

Déduisons-en d'abord que ρ_w est bien défini et bijectif, lorsque $w \in W_{\mathcal{O}}$, et que les propriétés de compatibilité sont bien vérifiées. Pour cela, effectuons une récurrence sur la longueur de w . Le cas $l_{\mathcal{O}}(w) = 1$ a déjà été établi. Soit $w'' = ws_\alpha \in W_{\mathcal{O}}$ avec $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O},\mu}$, $l_{\mathcal{O}}(w'') = l_{\mathcal{O}}(w) - 1$. Par hypothèse de récurrence, les opérateurs ρ_w et ρ_{s_α} sont bien définis, bijectifs, et ils vérifient les propriétés de compatibilité. On peut donc appliquer (*), et on trouve

$$\rho_{w''}^{-1} = \lambda(w''s_\alpha^{-1}w^{-1})\rho_{s_\alpha}^{-1}\rho_w^{-1},$$

l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P) \cap s_\alpha\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(\overline{P}) \cap w^{-1}s_\alpha^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$ étant vide grâce à l'hypothèse $l(ws_\alpha) = l(w) + l(s_\alpha)$. Comme $w''s_\alpha^{-1}w^{-1} \in M$, il s'ensuit que $\rho_{w''}^{-1}$ est bijectif, que $\rho_{w''}$ est bien défini et qu'il vérifie les propriétés de compatibilité.

Il reste à montrer l'égalité (*). Soient $w, w' \in W_{\mathcal{O}}$ vérifiant les hypothèses indiquées. On a

$$\begin{aligned}
& \rho_{w'}^{-1} \rho_w^{-1} \\
&= \rho_{w'}^{-1} \left(\left(\prod_{\alpha} (Y_{\alpha} - 1) \right) \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi) \right)_{|\chi=1} \\
&= \left(\left(\prod_{\alpha} (Y_{\alpha} - 1) \right) \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(w' \sigma \otimes \chi) \right)_{|\chi=1} \rho_{w'}^{-1} \\
&= \left(\left(\prod_{\alpha} (w'^{-1} Y_{\alpha} - 1) \right) \left(\prod_{\beta} (Y_{\beta} - 1) \right) \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(w' \sigma \otimes w' \chi) \times \right. \\
&\quad \left. \times \lambda(w') J_{w'^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi) \right)_{|\chi=1} \\
&= \left(\left(\prod_{\alpha} (w'^{-1} Y_{\alpha} - 1) \right) \left(\prod_{\beta} (Y_{\beta} - 1) \right) \mu_{w, w'}^{-1} \lambda(w w') J_{w'^{-1} w^{-1} P|P}(\sigma \otimes \chi) \right)_{|\chi=1},
\end{aligned}$$

le produit sur α portant sur l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})$ et celui sur β sur l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})$. Remarquons l'égalité ensembliste

$$\begin{aligned}
& (w'^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1} w^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})) \cup (\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})) \\
&= (\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1} w^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P})) \\
&\quad \cup \pm (\Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P) \cap w'^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(\overline{P}) \cap w'^{-1} w^{-1} \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}(P)),
\end{aligned}$$

les réunions étant disjointes. Comme $w'^{-1} Y_{\alpha} = Y_{w'^{-1} \alpha}$ par le lemme **1.5**, on en déduit bien l'égalité (*). \square

2.5 On va maintenant fixer un isomorphisme $\rho_w : wE \rightarrow E$ d'abord pour $w \in R(\mathcal{O})$ et ensuite pour $w \in W(M, \mathcal{O})$.

Rappelons que $R(\mathcal{O})$ est un produit de sous-groupes $R(\mathcal{O})_i$ d'ordre 2 (cf. **1.15** (ii)). Notons s_{α_i} l'élément non trivial de $R(\mathcal{O})_i$. Choisissons pour tout i un isomorphisme $\rho_{s_{\alpha_i}} : s_{\alpha_i} E \rightarrow E$ tel que $\rho_{s_{\alpha_i}}^2 \sigma(s_{\alpha_i}^{-2}) = id_E$. (Ceci est toujours possible, quitte à multiplier $\rho_{s_{\alpha_i}}$ par un nombre complexe non nul. L'isomorphisme $\rho_{s_{\alpha_i}}$ est uniquement déterminé au produit par ± 1 près.)

Changer le représentant de s_{α_i} à droite par un élément de $m \in M$ revient alors à composer $\rho_{s_{\alpha_i}}$ à droite avec $\sigma(m)$, comme on le vérifie facilement.

Il est clair que les $\rho_{s_{\alpha_i}}$ commutent entre eux, puisque les s_{α_i} agissent sur des composantes différentes de σ . Pour $r \in R(\mathcal{O})$, $r = s_{\alpha_{i_1}} \cdots s_{\alpha_{i_l}}$, on pose $\rho_r = \rho_{s_{\alpha_{i_1}}} \cdots \rho_{s_{\alpha_{i_l}}}$. Par ce qui précède, il est clair que ceci est indépendant de la décomposition choisie pour r . Multiplier le représentant de r à droite par un élément $m \in M$ revient à composer ρ_r à droite avec $\sigma(m)$. En effet, cela revient à multiplier chaque élément s_{α_i} dans la décomposition de r à droite par un certain élément m_i

de $M_{s_{\alpha_i}}$ par notre convention dans 1.5 sur le choix des représentants des éléments dans $R(\mathcal{O})$.

Finalement, pour $w \in W(M, \mathcal{O})$, $w = rw_{\mathcal{O}}$ avec $r \in R(\mathcal{O})$ et $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}}$, on pose $\rho_w = \rho_r \rho_{w_{\mathcal{O}}}$.

L'isomorphisme $i_P^G wE \rightarrow i_P^G E$ déduit de ρ_w par fonctorialité sera (par abus de notation) noté encore ρ_w . Multiplier le représentant de w à droite par un élément m de M revient à composer ρ_w à droite par $i_P^G(\sigma(m))$.

2.6 Définition: Soit $\chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})$ et rappelons l'isomorphisme $\phi_{\sigma, \chi} : E \rightarrow E_{\chi}$ défini dans 1.17. On notera ϕ_{χ} l'automorphisme de E_B qui envoie $e \otimes b$ sur $(\phi_{\sigma, \chi} e) \otimes b_{\chi^{-1}}$. On écrira encore ϕ_{χ} pour les automorphismes de $i_P^G E_B$ et de $i_P^G E_{K(B)}$ déduits de ϕ_{χ} par fonctorialité.

2.7 Le lemme suivant sera utile dans la suite:

Lemme: Soient $\alpha, \alpha' \in \Delta_{\mathcal{O}}$ des racines simples, $s = s_{\alpha}$ et $s' = s_{\alpha'}$. Soient $m_s \in M_{\alpha}^1 \cap M$ et $m_{s'} \in M_{\alpha'}^1 \cap M$. Alors

$$b_{m_s} {}^s b_{m_{s'}} {}^{ss'} b_{m_s} {}^{ss's} b_{m_{s'}} \cdots = b_{m_{s'}} {}^{s'} b_{m_s} {}^{s's} b_{m_{s'}} {}^{s'ss'} b_{m_s} \cdots,$$

le nombre de facteurs de chaque côté étant égal à l'ordre de ss' .

Preuve: C'est un calcul simple, en considérant les différents systèmes de racines de rang 2. \square

3. Considérons $\text{End}_G(i_P^G E_B)$ comme B -module à gauche. On va construire pour tout $w \in W(M, \mathcal{O})$ un opérateur d'entrelacement $A_w \in \text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)})$ qui se prolonge de façon canonique en un élément de $\text{End}_G(i_P^G E_{K(B)})$.

3.1 Pour $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, notons B_{χ} l'idéal des polynômes $b \in B$ avec $b(\chi) = 0$ et sp_{χ} les applications de spécialisation $E \otimes B \rightarrow E$ et $E \otimes K(B) \rightarrow E$, $e \otimes b \mapsto b(\chi)e$, ainsi que les applications induites $i_P^G E_B \rightarrow i_P^G E$ et $i_P^G E_{K(B)} \rightarrow i_P^G E$. (Dans le cas de $E_{K(B)}$, l'application sp_{χ} n'est définie que sur le sous-espace des éléments qui sont réguliers en χ .) Soit $w \in W(M)$. D'après [W], il existe $b_w \in B$ et un homomorphisme de $G - B$ -modules

$$J_{B,w} : i_P^G E_B \rightarrow i_P^G (wE_B)$$

tel que, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, $v \in i_P^G E_B$,

$$b_w(\chi)(\lambda(w)J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi)sp_{\chi}v) = sp_{\chi}J_{B,w}v.$$

L'homomorphisme $b_w^{-1}J_{B,w}$ définit un élément de $\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G(wE_{K(B)}))$ que l'on notera $J_{K(B),w}$. Soit maintenant $w \in W(M, \mathcal{O})$. Alors on note A_w l'élément de $\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)})$ obtenu, en composant $J_{K(B),w}$ à gauche avec $\rho_w \circ \tau_w$. Il se prolonge de façon canonique en un élément de l'algèbre $\text{End}_G(i_P^G E_{K(B)})$.

Proposition: *Soit $w \in W(M, \mathcal{O})$. Multiplier le représentant de w à droite par un élément $m \in M$ revient à multiplier l'opérateur A_w à gauche par ${}^w b_m^{-1}$. En particulier, A_w ne dépend pas du choix d'un représentant dans K de w .*

Preuve: Par la définition ci-dessus, celle dans **2.5** et la remarque dans **1.1**, on a $\rho_{wm} = \rho_w i_P^G(\sigma(m))$ et $J_{K(B),wm} = i_P^G(\sigma_B(m^{-1}))J_{K(B),w}$, d'où le résultat. \square

3.2 Lemme: *Soient $w \in W(M, \mathcal{O})$, $v \in i_P^G E_B$ et $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tels que $\sigma \otimes \chi$ soit un point régulier pour $J_{w^{-1}P|P}$.*

Alors

$$sp_\chi A_w v = \rho_w \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes w^{-1}\chi) sp_{w^{-1}\chi} v.$$

Preuve: On a

$$sp_\chi A_w v = sp_\chi \rho_w \tau_w J_{K(B),w} v = \rho_w sp_\chi \tau_w J_{K(B),w} v.$$

Mais, l'application canonique $B \rightarrow B/B_\chi$ composée à droite avec τ_w a comme noyau $B_{w^{-1}\chi}$. Cette application composée est donc égale à $sp_{w^{-1}\chi}$. L'expression ci-dessus est donc égale à $\rho_w sp_{w^{-1}\chi} J_{K(B),w} v$. Ceci est bien égal à l'expression de l'énoncé. \square

3.3 Proposition: *Soient $w, w' \in W_{\mathcal{O}}$. Alors,*

$$A_w A_{w'} = {}^{ww'} \mu_{w,w'}^{-1}(\mu_{w,w'} \prod_{\alpha} (Y_{\alpha} - 1)^{-1} (Y_{\alpha}^{-1} - 1)^{-1})|_{\chi=1} A_{ww'},$$

le produit portant sur l'ensemble $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P) \cap w'^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(\overline{P}) \cap w'^{-1}w^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$.

Preuve: Il suffit de montrer que, pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, les deux opérateurs ont la même spécialisation en χ . Posons $w'' = ww'$. D'après le lemme **3.2** et la propriété de commutation de ρ_w remarquée en **2.4**, la spécialisation en χ de

l'opérateur à gauche est égale à

$$\begin{aligned}
& \rho_w \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes w^{-1}\chi) \rho_{w'} \lambda(w') J_{w'^{-1}P|P}(\sigma \otimes w'^{-1}w^{-1}\chi) sp_{w'^{-1}w^{-1}\chi} \\
&= \rho_w \rho_{w'} \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(w' \sigma \otimes w^{-1}\chi) \lambda(w') J_{w'^{-1}P|P}(\sigma \otimes w'^{-1}w^{-1}\chi) sp_{w'^{-1}w^{-1}\chi} \\
&= \rho_w \rho_{w'} \lambda(w) \lambda(w') {}^{ww'}\mu_{w,w'}^{-1}(\chi) J_{w'^{-1}w^{-1}P|P}(\sigma \otimes w'^{-1}w^{-1}\chi) sp_{w'^{-1}w^{-1}\chi} \\
&= \rho_w \rho_{w'} sp_{w^{-1}\chi} \tau_{w'} \lambda(ww'w''^{-1}) {}^{ww'}\mu_{w,w'}^{-1}(\chi) J_{K(B),ww'} \\
&= \rho_w sp_{w^{-1}\chi} \rho_{w'} \tau_{w'} \lambda(ww'w''^{-1}) {}^{ww'}\mu_{w,w'}^{-1}(\chi) J_{K(B),ww'} \\
&= sp_\chi \rho_w \rho_{w'} \tau_{ww'} \lambda(ww'w''^{-1}) {}^{ww'}\mu_{w,w'}^{-1}(\chi) J_{K(B),ww'}.
\end{aligned}$$

Il reste alors à remplacer $\rho_w \rho_{w'}$ par l'expression donnée dans la proposition 2.4, d'où la proposition. \square

3.4 Corollaire: Soient $w, w' \in W_{\mathcal{O}}$ tels que $l_{\mathcal{O}}(ww') = l_{\mathcal{O}}(w) + l_{\mathcal{O}}(w')$. Alors $A_w A_{w'} = A_{ww'}$. Par ailleurs, si $s = s_\alpha$ est une réflexion simple dans $W_{\mathcal{O}}$, alors il existe un nombre complexe $c_s'' \neq 0$ tel que $A_s^2 = c_s''(\mu^{M_\alpha})^{-1}$.

Preuve: Si $l_{\mathcal{O}}(ww') = l_{\mathcal{O}}(w) + l_{\mathcal{O}}(w')$, alors $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P) \cap w'^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(\overline{P}) \cap w'^{-1}w^{-1}\Sigma_{\mathcal{O},\mu}(P)$ est l'ensemble vide, et la fonction rationnelle $\mu_{w,w'}$ est constante. La première assertion est donc une conséquence immédiate de 3.3. La deuxième assertion résulte de 3.3 et du fait que $\mu_{s,s}$ est égal à μ^{M_α} multiplié par une constante et que $A_1 = id$. \square

3.5 Proposition: (i) Pour $w \in W_{\mathcal{O}}$ et $r \in R(\mathcal{O})$, on a

$$A_r A_w = A_{rw} = A_{rwr^{-1}} A_r.$$

(ii) Pour tous $r, r' \in R(\mathcal{O})$, on a $A_r A_{r'} = A_{rr'}$.

(iii) Pour tout $b \in B$ et tout $w \in W(M, \mathcal{O})$, $A_w b = {}^w b A_w$.

Preuve: (i) Comme $r\Delta_{\mathcal{O},\mu} = \Delta_{\mathcal{O},\mu}$ pour $r \in R(\mathcal{O})$, il suffit, suite au corollaire 3.4, de considérer le cas où w est un élément simple s_α de $W_{\mathcal{O}}$. En appliquant le même raisonnement comme dans la preuve de la proposition 3.3, on trouve pour χ un élément générique de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ que

$$sp_\chi(A_r A_{s_\alpha}) = \rho_r \rho_{s_\alpha} \lambda(r) \lambda(s_\alpha) J_{s_\alpha^{-1}r^{-1}P|P}(\sigma \otimes s_\alpha^{-1}r^{-1}\chi) sp_{s_\alpha^{-1}r^{-1}\chi} = sp_\chi(A_{rs_\alpha})$$

et

$$sp_\chi(A_{rs_\alpha r^{-1}} A_r) = \rho_{s_\alpha} \rho_r \lambda(s_\alpha) \lambda(r) J_{r^{-1}s_\alpha^{-1}P|P}(\sigma \otimes r^{-1}s_\alpha^{-1}\chi) sp_{r^{-1}s_\alpha^{-1}\chi}.$$

Ces deux expressions sont égales, si et seulement si

$$\rho_r \rho_{s_\alpha} \lambda(r) \lambda(s_\alpha) = \rho_{s_{r\alpha}} \rho_r \lambda(s_{r\alpha}) \lambda(r),$$

ce qui équivaut à

$$\rho_r^{-1} \rho_{s_{r\alpha}}^{-1} \rho_r \rho_{s_\alpha} = \lambda(s_{r\alpha} r s_\alpha^{-1} r^{-1}).$$

Or, comme le côté gauche de cette dernière égalité est égal à $\rho_{r\sigma, s_{r\alpha}}^{-1} \rho_{\sigma, s_\alpha}$, ceci résulte de la dernière assertion de la proposition 2.4

(ii) Il suffit de considérer le cas où $r = s_{\alpha_i}$ est l'élément non nul d'un $R(\mathcal{O})_i$. On va d'abord considérer le cas où la projection de r' sur $R(\mathcal{O})_i$ est nulle. Par le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 3.3, on trouve pour χ générique

$$sp_\chi(A_r A_{r'}) = \rho_r \rho_{r'} \lambda(r) \lambda(r') J_{r'^{-1} r^{-1} P|P}(\sigma \otimes r'^{-1} r^{-1} \chi) sp_{r'^{-1} r^{-1} \chi}.$$

Comme $\rho_r \rho_{r'} = \rho_{rr'}$ si la projection de r' sur $R(\mathcal{O})_i$ est nulle, cette expression est égale à $sp_\chi(A_{rr'})$. On voit également que les opérateurs $A_{s_{\alpha_i}}$ et $A_{r'}$ commutent.

Supposons maintenant la projection de $A_{r'}$ sur $R(\mathcal{O})_i$ non nulle. Il suffit alors, d'après la commutativité, de considérer le cas $r = r'$. Pour χ générique dans $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, on trouve, par un raisonnement analogue à celui ci-dessus,

$$sp_\chi(A_r^2) = \rho_r \rho_r \lambda(r^2) J_{P|P}(\sigma \otimes r^2 \chi) sp_{r^2 \chi} = sp_\chi,$$

puisque $r^2 \in M \cap K$ et que ρ_r a été choisi tel que $\rho_r^2 \lambda(r^2) = \text{id}$.

(iii) C'est immédiat. □

3.6 Proposition: *L'espace $\text{Hom}_M(E_B, E_{K(B)})$ est isomorphe à $\oplus_{\chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})} K(B)\phi_\chi$ en tant que $K(B)$ -espace vectoriel.*

Preuve: On a $E_B = \text{ind}_{M^1}^M E_{|M^1}$. Il faut donc déterminer $\text{Hom}_M(\text{ind}_{M^1}^M E, E_{K(B)})$. Observons que $(E_{|M^1})^\vee = (E^\vee)_{|M^1}$, puisque M^1 est un sous-groupe ouvert de M . Comme M^1 et M sont unimodulaires, la réciprocity de Frobenius relative à l'induction compacte [BZ, 2.29] donne donc $\text{Hom}_M(\text{ind}_{M^1}^M E_{|M^1}, E_{K(B)}) \simeq \text{Hom}_{M^1}(E_{|M^1}, (E_{K(B)})_{|M^1})$. On définit un isomorphisme $\beta : \text{Hom}_M(\text{ind}_{M^1}^M E_{|M^1}, E_{K(B)}) \rightarrow \text{Hom}_{M^1}(E_{|M^1}, (E_{K(B)})_{|M^1})$, $\varphi \mapsto \beta(\varphi)$, en posant $\beta(\varphi)(e) = \varphi(v_e)$, où v_e désigne l'élément de $\text{ind}_{M^1}^M E$ de valeur 0 pour $m \in M - M^1$ et de valeur e en 1. Notons $E_{\overline{m}}$, $\overline{m} \in M/M^\sigma$, les différentes composantes irréductibles de $E_{|M^1}$. Elles sont deux à deux non isomorphes d'après la proposition 1.16. Il en résulte que $\text{Hom}_{M^1}(E_{|M^1}, (E_{K(B)})_{|M^1}) = \bigoplus_{\overline{m} \in M/M^\sigma} \text{Hom}_{M^1}(E_{\overline{m}}, E_{\overline{m}} \otimes K(B))$. Choisissons une \mathbb{C} -base f_i , $i \in I$, de $K(B)$. Alors, en tant que M^1 -module, $E_{\overline{m}} \otimes K(B) = \bigoplus_{i \in I} E_{\overline{m}} \otimes f_i$. On déduit alors du lemme de Schur que les éléments de $\text{Hom}_{M^1}(E_{\overline{m}}, E_{\overline{m}} \otimes K(B))$ sont de la forme $e \mapsto e \otimes f$ avec $f \in K(B)$. Par suite, $\text{Hom}_{M^1}(E_{|M^1}, (E_{K(B)})_{|M^1})$ est un $K(B)$ -module isomorphe à $K(B)^{M/M^\sigma}$.

Pour prouver la proposition, il suffit donc grâce à la $K(B)$ -linéarité de β de montrer que les $\beta(\phi_\chi)$ forment une base du $K(B)$ -module $\text{Hom}_{M^1}(E|_{M^1}, (E_{K(B)})|_{M^1})$. Identifions $\text{ind}_{M^1}^M E|_{M^1}$ et $E \otimes B$. On a $\beta(\phi_\chi)(e) = \phi_\chi(e \otimes 1) = \phi_{\sigma, \chi}(e) \otimes 1$. La projection de $\beta(\phi_\chi)$ sur $\text{Hom}_{M^1}(E_{\overline{m}}, E_{\overline{m}} \otimes K(B))$ est donc la multiplication par $\chi(m)$. On déduit alors de la dualité des groupes $\text{Stab}(\mathcal{O})$ et M/M^σ et de l'indépendance linéaire des caractères que les $\beta(\phi_\chi)$ forment en effet une base du $K(B)$ -module $\text{Hom}_{M^1}(E|_{M^1}, (E_{K(B)})|_{M^1})$. \square

3.7 Proposition: *Les opérateurs d'entrelacement $\phi_\chi A_w$, où $\chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})$ et $w \in W(M, \mathcal{O})$, sont $K(B)$ -linéairement indépendants dans $\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)})$ muni de la structure de $K(B)$ -espace vectoriel induite par celle de $i_P^G E_{K(B)}$.*

Preuve: Supposons par absurde les opérateurs $\phi_\chi A_w$ $K(B)$ -linéairement dépendants. Il existe alors des éléments $b_{w, \chi}$ de B tels que $\sum_{w \in W(M, \mathcal{O}), \chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})} b_{w, \chi} \phi_\chi A_w = 0$, et on peut supposer le nombre l d'éléments $b_{w, \chi} \neq 0$ minimal. Comme aucun des $\phi_\chi A_w$ n'est nul, il existe au moins deux indices (w_1, χ_1) et (w_2, χ_2) avec $b_{w_1, \chi_1} \neq 0 \neq b_{w_2, \chi_2}$. On peut trouver $b \in B$ avec $({}^{w_1}b)_{\chi_1^{-1}} = b$ et $({}^{w_2}b)_{\chi_2^{-1}} \neq b$. On a $\sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} b b_{w, \chi} \phi_\chi A_w = 0$ et $0 = \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} b_{w, \chi} \phi_\chi A_w b = \sum_{w \in W(M, \mathcal{O})} b_{w, \chi} ({}^w b)_{\chi^{-1}} \phi_\chi A_w$, où on a appliqué la règle de commutation facile $A_w b = {}^w b A_w$. Soustrayant ces deux équations, on obtient une combinaison linéaire des $\phi_\chi A_w$ qui est nulle et dont moins de l coefficients sont non nuls. Ceci donne une contradiction. \square

3.8 Théorème: *En tant que $K(B)$ -espaces vectoriels, on a*

$$\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)}) = \bigoplus_{w \in W(M, \mathcal{O}), \chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})} K(B) \phi_\chi A_w.$$

Preuve: Par la réciprocité de Frobenius, on a

$$\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)}) = \text{Hom}_M(r_P^G i_P^G E_B, E_{K(B)}).$$

Par le lemme géométrique [BZ, I.5], $r_P^G i_P^G E_B$ admet une filtration par des sous-espaces \mathcal{F}_w , $w \in W^M \setminus W^G / W^M$, dont les sous-quotients sont isomorphes à $w E_B$. On en déduit une filtration du $K(B)$ -module $\text{Hom}_M(r_P^G i_P^G E_B, E_{K(B)})$ dont les sous-quotients sont, en tenant compte de 3.6, isomorphes à $\text{Hom}_M(w E_B, E_{K(B)})$.

Comme $\text{Hom}_M(w E_B, E_{K(B)}) \neq 0$, si et seulement si $w \in W(M, \mathcal{O})$ et alors, par la proposition 3.6, $\text{Hom}_M(w E_B, E_{K(B)})$ est de dimension $|\text{Stab}(\mathcal{O})|$, on en déduit que la dimension de $\text{Hom}_G(i_P^G E_B, i_P^G E_{K(B)})$ est égale à $|W(M, \mathcal{O})| |\text{Stab}(\mathcal{O})|$.

Comme les opérateurs d'entrelacement $\phi_\chi A_w$, $w \in W(M, \mathcal{O})$, $\chi \in \text{Stab}(\mathcal{O})$ sont linéairement indépendants par la proposition 3.7, le théorème en résulte. \square

4. Maintenant, on fixe une composante irréductible E_1 de $E|_{M^1}$, et on note σ_1 la représentation de M^1 dans cet espace. On va s'intéresser à l'algèbre $\text{End}_G(i_P^G(\text{ind}_{M^1}^M E_1))$. Remarquons que ni cette algèbre ni la représentation $\text{ind}_{M^1}^M E_1$ ne dépendent du choix de (σ_1, E_1) . Notons $B_{\mathcal{O}}$ la sous-algèbre de B formée des polynômes qui sont invariants par translation par des éléments de $\text{Stab}(\mathcal{O})$. D'après le corollaire **1.17**, c'est l'anneau des fonctions régulières de la variété affine quotient $X(M/M^1)/X(M/M^\sigma)$. Elle s'identifie donc à $\mathbb{C}[M^\sigma/M^1]$. En particulier, c'est un anneau factoriel, puisque M^σ/M^1 est un \mathbb{Z} -module libre de type fini et de même rang que M/M^1 . Rappelons que l'on a noté $\mathcal{R}(M/M^1)$ un système de représentants de M/M^1 .

4.1 Lemme: *L'isomorphisme canonique $\text{ind}_{M^1}^M E|_{M^1} \rightarrow E \otimes B$ de **2.1** envoie $\text{ind}_{M^1}^M E_1$ sur l'ensemble $\sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m) E_1 \otimes b_m$. En particulier, cet espace est un $B_{\mathcal{O}}$ -sous-module de $E \otimes B$.*

Preuve: C'est immédiat. □

On identifiera dans la suite $\text{ind}_{M^1}^M E_1$ et $\sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m) E_1 \otimes b_m$ au moyen de l'isomorphisme dans **2.1**. On écrira $E_{B_{\mathcal{O}}}$ pour $\text{ind}_{M^1}^M E_1$, bien que cet espace ne soit pas isomorphe à $E \otimes B_{\mathcal{O}}$.

4.2 Notons $K(B_{\mathcal{O}})$ le corps des fractions de $B_{\mathcal{O}}$ et posons $(E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})} = E_{B_{\mathcal{O}}} \otimes_{B_{\mathcal{O}}} K(B_{\mathcal{O}})$.

Lemme: *On a*

$$\text{Hom}_M(E_{B_{\mathcal{O}}}, E_{K(B_{\mathcal{O}})}) \simeq K(B_{\mathcal{O}}).$$

Preuve: Comme dans la preuve de la proposition **3.6**, on déduit de la réciprocity de Frobenius que

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_M(\text{ind}_{M^1}^M E_1, (\text{ind}_{M^1}^M E_1)_{K(B_{\mathcal{O}})}) \\ &= \text{Hom}_{M^1}(E_1, (\text{ind}_{M^1}^M E_1 \otimes_{B_{\mathcal{O}}} K(B_{\mathcal{O}}))|_{M^1}) \\ &= \text{Hom}_{M^1}(E_1, (\bigoplus_{m \in \mathcal{R}(M/M^\sigma)} \sigma(m) E_1 \otimes b_m) \otimes_{B_{\mathcal{O}}} K(B_{\mathcal{O}})) \\ &= \text{Hom}_{M^1}(E_1, E_1 \otimes K(B_{\mathcal{O}})) \\ &= K(B_{\mathcal{O}}). \end{aligned}$$

□

4.3 Proposition: *On a*

$$\bigcap_{\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})} \ker(\phi_\eta - \text{id}) = (E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}.$$

En particulier, les automorphismes ϕ_η sont triviaux sur $E_{B_{\mathcal{O}}}$.

Preuve: Fixons des systèmes de représentants $\mathcal{R} = \mathcal{R}(M/M^1)$ de M/M^1 et $\mathcal{R}' = \mathcal{R}(M/M^\sigma)$ de M/M^σ respectivement. Tout élément de $(E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}$ s'écrit sous la forme $b^{-1} \sum_{m \in \mathcal{R}} \sigma(m) e_m \otimes b_m$ avec $e_m \in E_1$ et $b \in B_{\mathcal{O}}$. On vérifie tout de suite qu'un tel élément est dans le noyau de $\phi_\eta - \text{id}$ pour tout η .

Inversement, soit $v \in E_{K(B)}$. Il peut s'écrire sous la forme $b^{-1} \sum_{(m, m') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'} \sigma(m') e_{m, m'} \otimes b_m$ avec $e_{m, m'} \in E_1$ et $b \in B$. Soit $\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})$. Alors,

$$\phi_\eta(v) = b_{\eta^{-1}}^{-1} \sum_{(m, m') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'} \sigma(m') \eta(m') \eta(m)^{-1} e_{m, m'} \otimes b_m.$$

Donc, $\phi_\eta(v) = v$ implique que

$$b_{\eta^{-1}} \sum_{(m, m') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'} \sigma(m') e_{m, m'} \otimes b_m = b \sum_{(m, m') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'} \sigma(m') \eta(m' m^{-1}) e_{m, m'} \otimes b_m.$$

Par suite, pour tout $m' \in \mathcal{R}'$,

$$b_{\eta^{-1}} \sum_{m \in \mathcal{R}} e_{m, m'} \otimes b_m = b \sum_{m \in \mathcal{R}} \eta(m' m^{-1}) e_{m, m'} \otimes b_m. \quad (*)$$

On va d'abord montrer que toute composante primaire de b divise $b_{\eta^{-1}}$. Comme b et $b_{\eta^{-1}}$ sont des monômes de Laurent de même degré, il s'ensuivra qu'ils ne diffèrent que par une constante, et il sera alors clair que $b^{-1} b_{\eta^{-1}} = \eta(m' m^{-1})$ si $e_{m, m'} \neq 0$.

Soit b_0 un facteur irréductible de b . On peut supposer que b_0 ne divise pas $\sum_{(m, m') \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'} \sigma(m') e_{m, m'} \otimes b_m$ dans E_B . Il existe donc $m' \in \mathcal{R}'$ tel que b_0 ne divise pas $\sum_{m \in \mathcal{R}} e_{m, m'} \otimes b_m$. Fixons une base $(e_i)_{i \in I}$ de E_1 et écrivons $e_{m, m'} = \sum_i c_i(m, m') e_i$ avec $c_i(m, m') \in \mathbb{C}$. Alors l'égalité (*) implique que

$$b_{\eta^{-1}} \sum_{m \in \mathcal{R}} \sum_{i \in I} c_i(m, m') e_i \otimes b_m = b \sum_{m \in \mathcal{R}} \sum_{i \in I} c_i(m, m') \eta(m' m^{-1}) e_i \otimes b_m.$$

On en déduit $b_{\eta^{-1}} \sum_{m \in \mathcal{R}} c_i(m, m') b_m = b \sum_{m \in \mathcal{R}} c_i(m, m') \eta(m' m^{-1}) b_m$ pour tout i . Par ailleurs, il existe au moins un i tel que b_0 ne divise pas $\sum_{m \in \mathcal{R}} c_i(m, m') b_m$ dans B . Par suite, la composante b_0 -primaire de b divise $b_{\eta^{-1}}$.

On a donc bien $b^{-1} b_{\eta^{-1}} = \eta(m' m^{-1})$, si $e_{m, m'} \neq 0$. Supposons qu'il existe $(m_0, m'_0) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ tel que $e_{m_0, m'_0} \neq 0$. Posons $h = m'_0 m_0^{-1}$. Alors, $\frac{b(\chi \eta^{-1})}{b(\chi)}$ est constant en χ de valeur $\eta(h)$.

Écrivons $b = \sum_{m \in M/M^1} c_m b_m$ avec $c_m \in \mathbb{C}$. Alors $b_{\eta^{-1}} = \sum_{m \in M/M^1} c_m \eta(m)^{-1} b_m$. Comme $b_{\eta^{-1}} = \eta(h) b$, on trouve

$$\sum_{m \in M/M^1} c_m \eta(m)^{-1} b_m = \sum_{m \in M/M^1} \eta(h) c_m b_m.$$

Considérant M/M^1 comme groupe de caractères de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, on déduit de l'indépendance linéaire des caractères que $\eta(h)c_m = \eta^{-1}(m)c_m$ pour tout m et tout $\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})$. Donc, $c_m \neq 0$ implique $m \in h^{-1}M^\sigma$, d'où $b = \sum_{m \in M^\sigma/M^1} c_m b_{h^{-1}m} = b_{h^{-1}b'}$ avec $b' := \sum_{m \in M^\sigma/M^1} c_m b_m \in B_{\mathcal{O}}$.

Comme $e_{m,m'} \neq 0$ implique par ce qui précédait $\eta(m'm^{-1}) = \eta(h)$ pour tout $\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})$, on a alors $m'm^{-1} \in hM^\sigma$. On en déduit $v = b'^{-1}b_h \sum_{m \in \mathcal{R}} \sigma(mh)e_m \otimes b_m$ avec $e_m \in E_1$. Or, ceci vaut $b'^{-1} \sum_{m \in \mathcal{R}} \sigma(mh)e_m \otimes b_{mh}$, et, par suite, v a la forme indiquée. \square

4.4 Lemme: *Supposons M Levi maximal de G et $W_{\mathcal{O}} \neq 1$. Soit s l'unique élément $\neq 1$ de $W_{\mathcal{O}}$ et (σ^1, E^1) une composante irréductible de $\sigma|_{M \cap G^1}$. Alors $s\sigma^1 \simeq \sigma^1$.*

Preuve: Comme K et U sont contenus dans G^1 , l'espace $i_{P \cap K}^K E^1$ est bien défini comme sous-espace G^1 -invariant de $i_{P \cap K}^K E$. Posons $\Sigma_{\mathcal{O}} = \{\pm\alpha\}$. Comme $\overline{U} \subseteq G^1$, il résulte directement de la définition des opérateurs d'entrelacement que les opérateurs $J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, envoient l'espace $i_{P \cap K}^K E^1$ dans l'espace $i_{P \cap K}^K E^1$, si λ est régulier. L'opérateur $J_{P|\overline{P}}$ possède la propriété analogue. Comme le composé $J_{P|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha}) J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ est scalaire, qu'il possède un pôle d'ordre 2 en $\lambda = 0$, et que les opérateurs $J_{P|\overline{P}}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ et $J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ possèdent au plus des pôles d'ordre 1, il en résulte que la restriction de $J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ à $i_{P \cap K}^K E^1$ admet un pôle d'ordre 1 en $\lambda = 0$. On va en déduire que $s\sigma^1 \simeq \sigma^1$. Plus précisément, on va montrer que $J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ est régulier en $\lambda = 0$, si $s\sigma^1 \not\simeq \sigma^1$. Si G^1 est un groupe réductif, ceci est prouvé dans [W, IV.2.2]. Comme G^1 n'est en général pas un groupe réductif, mais seulement localement profini, il faut généraliser cette preuve, ce qui demande quelques préparations préliminaires.

Pour simplifier, posons $P^1 = (G^1 \cap M)U$. Remarquons d'abord que dans la théorie des représentations lisses des groupes localement profinis [BZ, 2.], la représentation de G^1 dans $i_{P \cap K}^K E^1$ est la représentation induite par la représentation $(\delta_P)|_{G^1 \cap M}^{1/2} \sigma^1$ prolongée trivialement à $(G^1 \cap M)U$. On la notera $i_{P^1}^{G^1} \sigma^1$. Posons $V^1 = i_{P \cap K}^K E^1$. Comme $\overline{U} \subseteq G^1$, l'espace vectoriel $V^1(\overline{U})$ engendré par les éléments de la forme $v^1 - (i_{(G^1 \cap M)U}^{G^1} \sigma^1)(\overline{u})v^1$, $v^1 \in V^1$, $\overline{u} \in \overline{U}$, est contenu dans V^1 . Par ailleurs, il est $G^1 \cap M$ -invariant. Il s'ensuit que le foncteur de Jacquet $r_{\overline{P}}^G$ envoie V^1 sur un sous-espace $G^1 \cap M$ -invariant de $r_{\overline{P}}^G i_{P \cap K}^K E$ que l'on munira de l'action de $G^1 \cap M$ donnée par la représentation $r_{\overline{P}}^G i_{P^1}^{G^1} \sigma$. On écrira $r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^1$ et $r_{\overline{P}^1}^{G^1} i_{P^1}^{G^1} \sigma^1$. On vérifie la réciprocity de Frobenius

$$\text{Hom}_{G^1}(i_{P^1}^{G^1} \sigma^1, i_{\overline{P}^1}^{G^1} \sigma^1) = \text{Hom}_{G^1 \cap M}(r_{\overline{P}^1}^{G^1} i_{P^1}^{G^1} \sigma^1, \sigma^1), \quad \Phi \mapsto r_{\overline{P}^1}^{G^1} \Phi,$$

où $(r_{\overline{P}^1}^{G^1} \Phi)(r_{\overline{P}^1}^{G^1} v^1) := (\Phi(v^1))(1)$. L'anneau $B^1 = \mathbb{C}[M \cap G^1/M^1]$ s'identifie à l'anneau des fonctions régulières sur $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M \cap G^1) := \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)|_{M \cap G^1}$. Posons $E_{B^1}^1 =$

$E^1 \otimes B^1$ et notons $\sigma_{B^1}^1$ la représentation de $M \cap G^1$ dans $E_{B^1}^1$ donnée par $\sigma_{B^1}^1(m^1)(e^1 \otimes b^1) = \sigma^1(m^1)e^1 \otimes b^1 b_{m^1}$. Les résultats ci-dessus s'appliquent également à la représentation $V_{B^1}^1 := i_{P^1}^{G^1} E_{B^1}^1$, considérée comme sous-espace G^1 -invariant de $i_P^G E_B$. Notons V^2 et $V_{B^1}^2$ les sous-espaces vectoriels de V^1 (resp. $V_{B^1}^1$) formés des éléments à support dans $P^1 \overline{P}^1$. L'application $p_1 : V^2 \rightarrow E^1$, $v^2 \mapsto \int_{\overline{U}} v^2(\overline{u}) d\overline{u}$, induit un isomorphisme $r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^2 \rightarrow E^1$ de représentations de $M \cap G^1$. L'application $p_s : V^1 \rightarrow sE^1$, $v^1 \mapsto v^1(s)$, définit un isomorphisme $r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^1 / r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^2 \rightarrow sE^1$. On a la situation analogue pour $V_{B^1}^1$ et $V_{B^1}^2$.

On va maintenant procéder à la preuve que $J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ est régulier en $\lambda = 0$, si $\sigma^1 \neq \sigma^1$: soit n le plus petit entier tel que $\lambda^n J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})$ soit régulier en $\lambda = 0$. Notons cet opérateur $J(\lambda)$ et considérons l'opérateur $r_{\overline{P}^1}^{G^1} J(0)$ dans $\text{Hom}_{M \cap G^1}(r_{\overline{P}^1}^{G^1} i_{P^1}^{G^1} \sigma^1, \sigma^1)$, obtenu par réciprocity de Frobenius. Comme le quotient $r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^1 / r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^2$ est isomorphe à σ^1 et que cette représentation n'est par hypothèse pas isomorphe à σ^1 , la restriction de $r_{\overline{P}^1}^{G^1} J(0)$ à $r_{\overline{P}^1}^{G^1} V^2$ est non triviale. Il existe donc $v^2 \in V_{B^1}^2$ tel que

$$0 \neq (r_{\overline{P}^1}^{G^1} J(0))(r_{\overline{P}^1}^{G^1} s p_1 v^2) = (J(0) s p_1 v^2)(1).$$

Mais, l'application $(J_{\overline{P}|P}(\sigma \otimes \chi_{\lambda\alpha})v^2)(1)$ est régulier en tout $\lambda \in \mathbb{C}$ [W, p. 283], puisque v^2 est à support dans $P\overline{P}$. Par conséquent, $n = 0$. \square

4.5 Lemme: *Pour tout $w \in W(M, \mathcal{O})$, il existe m_w dans M tel que $b_{m_w} A_w$ laisse invariant l'espace $(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}$. Si $w = s_\alpha$ avec $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}, \mu}$ ou $w \in R(\mathcal{O})_i$, on peut choisir m_w dans $M \cap M_\alpha^1$.*

Preuve: Par définition, $A_w = \rho_w \tau_w b_w^{-1} J_{B,w}$ avec $b_w \in B^\times$. En fait, on peut choisir $b_w \in B_{\mathcal{O}}^\times$, puisque la valeur de $J_{w^{-1}P|P}$ en une représentation σ' ne dépend en un certain sens que de la classe d'isomorphie de σ' [W, IV]. L'opérateur $\lambda(w)^{-1} J_{B,w}$ commute avec les opérateurs ϕ_η , $\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})$, [W, IV.1]. On déduit donc de la proposition 4.3 que $J_{B,w}$ envoie l'espace $i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$ dans l'espace $(i_P^G w E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}$. Considérons la restriction de l'isomorphisme $\rho_w \tau_w : i_P^G w E_B \rightarrow i_P^G E_B$ à $i_P^G w E_{B_{\mathcal{O}}}$.

L'application τ_w envoie un élément $v := \sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m) e_m \otimes b_m$ de $E_{B_{\mathcal{O}}}$ ($e_m \in E_1$), sur $\sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m) e_m \otimes b_{w m w^{-1}} = \sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} (w\sigma)(m) e_{w^{-1} m w} \otimes b_m$. L'isomorphisme ρ_w envoie $(w\sigma)(m) e_{w^{-1} m w}$ sur un élément dans $\sigma(m) \rho_{\sigma, w} E_1$, d'où $\rho_w \tau_w v \in \sum_{m \in \mathcal{R}(M/M^1)} \sigma(m) \rho_{\sigma, w} E_1 \otimes b_m$. L'espace $\rho_{\sigma, w} E_1$ est le sous-espace de $E_{|M^1}$ muni de la représentation $w^{-1} \sigma_1$. Par 1.16, il existe $m_w \in M$ tel que $\sigma(m_w) \rho_{\sigma, w} E_1$ soit égal à E_1 . Il en résulte que l'opérateur A_w laisse invariant $i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})}$, si on multiplie le représentant de w dans G à droite par $w^{-1} m_w w$. Or, ceci revient par 3.1 à multiplier A_w par $b_{m_w}^{-1}$.

Soit maintenant $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}, \mu}$ et $s = s_\alpha \in W_{\mathcal{O}}$. Notons σ^1 la composante irréductible de $\sigma|_{M \cap M_\alpha^1}$ dont la restriction à M^1 contient σ_1 . Comme $s\sigma^1 \simeq \sigma^1$ par le lemme 4.4, il existe $m_s \in M \cap M_\alpha^1$ tel que $s\sigma_1 \simeq m_s\sigma_1$. L'opérateur $b_{m_s}A_s$ laisse l'espace $i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})}$ invariant, par ce qui précède.

Si $w \in R(\mathcal{O})_i$, alors l'effet de w sur σ porte sur la seule composante σ_i de σ avec $w\sigma_i \simeq \sigma_i$. On peut donc choisir m_w dans le groupe GL_{k_i} sur lequel σ_i est définie. Il appartient donc à une composante de M_α qui est dans les notations de la proposition 1.13 égale à \underline{H}_{k_i+k} . Comme cette composante est semi-simple, m_w appartient bien à M_α^1 . \square

4.6 Définition: Si s est une symétrie simple dans $W_{\mathcal{O}}$, fixons un élément m_s de $M \cap M_\alpha^1$ tel que les conclusions du lemme 4.5 soient vérifiées et posons $J_s = b_{m_s}A_s$. C'est un élément de $\text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})})$. Pour $r \in R(\mathcal{O})_i$, fixons $m_r \in R(\mathcal{O})$ tel que les conclusions du lemme 4.5 relatives à A_r soient vérifiées et posons $J_r = b_{m_r}A_r$. Pour $w \in W_{\mathcal{O}}$, $w = s_1 \cdots s_l$, définissons $J_w = J_{s_1} \cdots J_{s_l}$. (Il résultera du lemme ci-après que cette définition est bonne.) Pour $r \in R(\mathcal{O})$, on fait de même à partir des $J_{s_{\alpha_i}}$, $\alpha_i \in R(\mathcal{O})_i$. Si finalement $w \in W(M, \mathcal{O})$, $w = rw_{\mathcal{O}}$, avec $r \in R(\mathcal{O})$ et $w_{\mathcal{O}} \in W_{\mathcal{O}}$, on écrira $J_w = J_r J_{w_{\mathcal{O}}}$.

4.7 Lemme: (i) Soit $w \in W_{\mathcal{O}}$ et soit $w = s_1 \cdots s_l$ une décomposition de w en symétries simples. L'opérateur $J_{s_1} \cdots J_{s_l}$ ne dépend que de w et non pas de la décomposition de w .

(ii) Si $s = s_\alpha$ est une réflexion simple dans $W_{\mathcal{O}}$, alors $J_s^2 = c_s''(\mu^{M_\alpha})^{-1}$, où c_s'' est le nombre complexe défini dans 3.4.

(iii) Pour tous $r, r' \in R(\mathcal{O})$, on a $J_r J_{r'} = J_{rr'}$.

Preuve: Pour (i), d'après [Sp, 8.3.3], il suffit de montrer l'assertion suivante: si s et s' sont des symétries simples dans $W_{\mathcal{O}}$ et si $m(s, s')$ désigne l'ordre de ss' , alors

$$J_s J_{s'} J_s \cdots = J_{s'} J_s J_{s'} \cdots,$$

le nombre de facteurs de chaque côté étant égal à $m(s, s')$. Vu le résultat de composition établi pour les opérateurs A_s dans 3.5 et la définition de J_s et de $J_{s'}$, ceci revient à prouver que

$$b_{m_s} s b_{m_{s'}} s s' b_{m_s} s s' s b_{m_{s'}} \cdots = b_{m_{s'}} s' b_{m_s} s' s b_{m_{s'}} s' s s' b_{m_s} \cdots.$$

Or, ceci résulte du lemme 2.7.

Pour (ii), la preuve de 3.4 reste valable, puisque J_s^2 est la restriction de A_s^2 .

Par itération, il suffit de vérifier l'égalité (iii) lorsque $r = s_{\alpha_i}$ est l'élément non trivial d'un $R(\mathcal{O})_i$. Si la projection de r' sur $R(\mathcal{O})_i$ est triviale, alors l'assertion résulte directement de la définition 4.6. Sinon, il suffit de montrer que $J_r^2 = 1$. Par 3.5, on a

$$J_r^2 = b_{m_r} A_r b_{m_r} A_r = b_{m_r} {}^r b_{m_r}.$$

Comme ${}^r b_{m_r} = b_{m_r}^{-1}$, on a bien $b_{m_r} {}^r b_{m_r} = 1$. \square

4.8 Lemme: *Les opérateurs J_w , $w \in W(M, \mathcal{O})$, sont $K(B_{\mathcal{O}})$ -linéairement indépendants dans $\text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})})$.*

Preuve: La preuve de **3.7** se généralise, après avoir remarqué que les opérateurs J_w sont non nuls. Or, ceci résulte du fait que sp_{χ} envoie l'espace $E_{B_{\mathcal{O}}}$, considéré comme sous-espace de E_B , sur l'espace E muni de la représentation $\sigma \otimes \chi$. Comme $sp_{\chi} \circ J_{w, K(B)} = \lambda(w) J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi) sp_{\chi}$ et que $J_{w^{-1}P|P}(\sigma \otimes \chi) \neq 0$ pour χ régulier, l'opérateur J_w est bien non nul. \square

4.9 Théorème: *En tant que $K(B_{\mathcal{O}})$ -modules,*

$$\text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})}) = \bigoplus_{w \in W(M, \mathcal{O})} K(B_{\mathcal{O}}) J_w.$$

Preuve: Par la réciprocité de Frobenius, on a

$$\text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})}) = \text{Hom}_M(r_P^G i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, E_{K(B_{\mathcal{O}})})$$

Par le lemme géométrique [BZ, I.5], $r_P^G i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$ admet une filtration par des sous-espaces \mathcal{F}_w , $w \in W^M \setminus W^G/W^M$, dont les sous-quotients sont isomorphes à $wE_{B_{\mathcal{O}}}$. On en déduit une filtration du $K(B_{\mathcal{O}})$ -module $\text{Hom}_M(r_P^G i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, E_{K(B_{\mathcal{O}})})$ dont les sous-quotients sont isomorphes à $\text{Hom}_M(wE_{B_{\mathcal{O}}}, E_{K(B_{\mathcal{O}})})$.

Compte tenu de l'indépendance $K(B_{\mathcal{O}})$ -linéaire des opérateurs J_w , $w \in W(M, \mathcal{O})$, il reste à prouver que

$$\text{Hom}_G(wE_{B_{\mathcal{O}}}, (E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}) \simeq \begin{cases} 0, & \text{si } w \notin W(M, \mathcal{O}); \\ K(B_{\mathcal{O}}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $wE_{B_{\mathcal{O}}}$ est un quotient de wE_B et que $(E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}$ est un sous-module de $E_{K(B)}$, la nullité de $\text{Hom}_M(wE_B, E_{K(B)})$ pour $w \notin W(M, \mathcal{O})$ implique celle de $\text{Hom}_M(wE_{B_{\mathcal{O}}}, (E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})})$.

Supposons maintenant $w \in W(M, \mathcal{O})$. On a $wE_{B_{\mathcal{O}}} = \text{ind}_{M^1}^M wE_1$. Comme $W(M, \mathcal{O})$ permute les composantes irréductibles de $E_{|M^1}$, on trouve que $\text{ind}_{M^1}^M wE_1 = E_{B_{\mathcal{O}}}$, d'où, d'après **4.2**, $\text{Hom}_M(wE_{B_{\mathcal{O}}}, E_{K(B_{\mathcal{O}})}) = K(B_{\mathcal{O}})$. \square

5. Dans cette section, on va définir pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$ un opérateur $T_w \in \text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ et montrer que les opérateurs $J_r T_w$, $r \in R(\mathcal{O})$ et $w \in W_{\mathcal{O}}$, forment une base du $B_{\mathcal{O}}$ -module $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$.

5.1 Lemme: *Soit $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$, $s = s_{\alpha}$. Posons $c_s = c'_s{}^{-1} c''_s$ (où c'_s et c''_s sont les nombres complexes définis respectivement en **1.5** et en **3.4**).*

(i) L'opérateur $sp_1(X_\alpha - 1)J_s$ est scalaire sur $i_{P \cap K}^K E$ et

$$(sp_1(X_\alpha - 1)J_s)^2 = c_s \frac{(1 - q^{-a_s})^2(1 + q^{-b_s})^2}{4}.$$

Par ailleurs, si $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ vérifie $X_\alpha(\chi) = 1$, alors, pour $v \in i_{P \cap K}^K E_{B_O}$,

$$sp_\chi(X_\alpha - 1)J_s v = (sp_1(X_\alpha - 1)J_s)sp_\chi v.$$

(ii) Supposons que μ^{M_α} s'annule en $X_\alpha = -1$. Fixons $\chi_{-1} \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tel que $X_\alpha(\chi_{-1}) = -1$. L'opérateur $sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)J_s$ est scalaire sur $i_{P \cap K}^K E$ et

$$(sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)J_s)^2 = c_s \frac{(1 + q^{-a_s})^2(1 - q^{-b_s})^2}{4}.$$

Par ailleurs, si $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ vérifie $X_\alpha(\chi) = -1$, alors, pour $v \in i_{P \cap K}^K E_{B_O}$,

$$sp_\chi(X_\alpha + 1)J_s v = (sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha - 1)J_s)sp_\chi v.$$

Preuve: (i) D'après le lemme 1.8 et nos choix, la représentation $i_{P \cap M_\alpha}^{M_\alpha} \sigma$ est irréductible, et la restriction de J_s à $i_{P \cap K}^K E$ a un pôle simple en $Y_\alpha = 1$. L'opérateur $sp_1(X_\alpha - 1)J_s$ est défini à partir d'un entrelacement de cette représentation avec elle-même. Cela doit donc être un scalaire. On a

$$(sp_1(X_\alpha - 1)J_s)^2 = sp_1((X_\alpha - 1)J_s(X_\alpha - 1)J_s) = sp_1((X_\alpha - 1)(X_\alpha^{-1} - 1)J_s^2).$$

Comme $(J_s)^2 = c_s''(\mu^{M_\alpha})^{-1}$, on trouve bien l'expression dans l'énoncé, après avoir remplacé μ^{M_α} par l'expression donnée dans la proposition 1.6.

Soit maintenant $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tel que $X_\alpha(\chi) = 1$. Ils existent alors $\eta \in \text{Stab}(\mathcal{O})$ et $\chi_1 \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_\alpha)$ tels que $\chi = \eta\chi_1$. On a ${}^s\chi_1 = \chi_1$ et $\chi_1(m_s) = 1$. Remarquons par ailleurs qu'en tant qu'espace vectoriel, $i_{P \cap K}^K E_{B_O} = \bigoplus_{m \in M/M^\sigma} i_{P \cap K}^K \sigma(m)E_1 \otimes b_m$. Soit $m \in M$ et $v_m \in i_{P \cap K}^K \sigma(m)E_1$. On a, en tant que fonction rationnelle en $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$,

$$\begin{aligned} & sp_{\chi'\chi}(X_\alpha - 1)J_s v_m \otimes b_m \\ &= (X_\alpha(\chi\chi') - 1)(\chi\chi')(m_s)\rho_{\sigma,s}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes {}^s(\chi'\chi)) {}^s(\chi'\chi)(m)v_m \\ &= \chi_1(m)(X_\alpha(\chi') - 1)(\eta\chi')(m_s)\rho_{\sigma,s}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes {}^s(\chi'\eta)) {}^s\chi'(m) {}^s\eta(m)v_m \\ &= \chi_1(m)(X_\alpha(\chi') - 1)(\eta\chi')(m_s)\rho_{\sigma,s}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes {}^s(\chi'\eta)) {}^s\chi'(m)\phi_{\sigma,s\eta}v_m \\ &= \chi_1(m)(X_\alpha(\chi') - 1)(\eta\chi')(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,s\eta}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes {}^s\chi') {}^s\chi'(m)v_m. \end{aligned}$$

Spécialisant en $\chi' = 1$, on trouve

$$sp_\chi(X_\alpha - 1)J_s v_m \otimes b_m = \chi_1(m)\eta(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,s\eta}\rho_{\sigma,s}^{-1}sp_1(X_\alpha - 1)J_s v_m \otimes b_m.$$

On vient de voir que $sp_1(X_\alpha - 1)J_s v_m \otimes b_m$ est un élément de $i_{P \cap K}^K \sigma(m)E_1$. Soit $e_1 \in E_1$. Remarquons que $\rho_{\sigma,s}^{-1}e_1$ est un élément de $(s\sigma)(m_s^{-1})E_1$. Alors

$$\begin{aligned} \rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,s\eta}\rho_{\sigma,s}^{-1}\sigma(m)e_1 &= \rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,s\eta}(s\sigma)(m)\rho_{\sigma,s}^{-1}e_1 \\ &= \rho_{\sigma,s}\eta(m_s^{-1})\eta(m)(s\sigma)(m)\rho_{\sigma,s}^{-1}e_1 \\ &= \eta(m_s^{-1})\eta(m)\sigma(m)e_1, \end{aligned}$$

i.e. $(\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,s\eta}\rho_{\sigma,s}^{-1})|_{i_{P \cap K}^K \sigma(m)E_1} = \eta(m_s^{-1})\eta(m)$. La dernière assertion du (i) du lemme en résulte.

(ii) Observons d'abord que ${}^s\chi_{-1}\chi_{-1}^{-1} \in \text{Stab}(\mathcal{O})$: comme μ^{M_α} s'annule en $X_\alpha = -1$, on trouve par les résultats de Harish-Chandra que $\sigma \otimes \chi_{-1} \simeq s(\sigma \otimes \chi_{-1}) \simeq s\sigma \otimes {}^s\chi_{-1} \simeq \sigma \otimes {}^s\chi_{-1}$, d'où $\sigma \simeq \sigma \otimes {}^s\chi_{-1}\chi_{-1}^{-1}$. Posons $\eta_{-1} = {}^s\chi_{-1}\chi_{-1}^{-1}$. Soit $v_m \in i_{P \cap K}^K \sigma(m)E_1$. On a alors, en tant que fonction rationnelle en $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$,

$$\begin{aligned} &sp_{\chi'\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)J_s v_m \otimes b_m \\ &= (X_\alpha(\chi'\chi_{-1}) + 1)(\chi'\chi_{-1})(m_s)\rho_{\sigma,s}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes {}^s(\chi_{-1}\chi'))({}^s(\chi_{-1}\chi'))(m)v_m \\ &= (X_\alpha(\chi'\chi_{-1}) + 1)(\chi'\chi_{-1})(m_s)\rho_{\sigma,s}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes \eta_{-1}\chi_{-1} {}^s\chi')(\chi_{-1} {}^s\chi')(m) \times \\ &\quad \times \phi_{\sigma,\eta_{-1}}v_m \\ &= (X_\alpha(\chi'\chi_{-1}) + 1)(\chi'\chi_{-1})(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,\eta_{-1}}\lambda(s)J_{sP|P}(\sigma \otimes \chi_{-1} {}^s\chi')(\chi_{-1} {}^s\chi')(m)v_m \\ &= \chi_{-1}(m)\chi_{-1}(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,\eta_{-1}}\rho_{\sigma \otimes \chi_{-1},s}^{-1}(-X_\alpha(\chi') + 1)\chi'(m_s)\rho_{\sigma \otimes \chi_{-1},s}\lambda(s) \times \\ &\quad \times J_{sP|P}(\sigma \otimes \chi_{-1} {}^s\chi')\chi'(m)v_m \end{aligned}$$

Notons $J_{s,\chi_{-1}}$ l'opérateur dans $\text{End}_G((E_{\chi_{-1}})_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})}$ défini comme J_s , en remplaçant σ par $\sigma \otimes \chi_{-1}$. Alors, d'après (i), on a pour $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ avec $X_\alpha(\chi) = 1$,

$$\begin{aligned} &sp_{\chi_{-1}\chi}((X_\alpha + 1)J_s)v_m \otimes b_m \\ &= \chi_{-1}(m)\chi_{-1}(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,\eta_{-1}}\rho_{\sigma \otimes \chi_{-1},s}^{-1}sp_\chi(-X_\alpha + 1)J_{s,\chi_{-1}}v_m \otimes b_m \\ &= \chi_{-1}(m_s)\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,\eta_{-1}}\rho_{\sigma \otimes \chi_{-1},s}^{-1}(sp_1(-X_\alpha + 1)J_{s,\chi_{-1}})sp_{\chi_{-1}\chi}v_m \otimes b_m. \end{aligned}$$

L'opérateur $\rho_{\sigma,s}\phi_{\sigma,\eta_{-1}}\rho_{\sigma \otimes \chi_{-1},s}^{-1}$ vient par functorialité d'un automorphisme d'une représentation irréductible dans E , puisque ${}^s(\sigma \otimes \chi_{-1})\eta_{-1} = s\sigma \otimes \chi_{-1}$. C'est donc un scalaire. En posant ci-dessus $\chi = 1$ et en utilisant la partie (i) du lemme relative à l'opérateur $J_{s,\chi_{-1}}$, on trouve que l'opérateur $sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)J_s$ est scalaire sur $i_{P \cap K}^K E$. L'égalité ci-dessus implique alors également la dernière assertion de la partie (ii) du lemme.

Concernant la deuxième assertion, il suffit de remarquer que

$$(sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)J_s)^2 = sp_{\chi_{-1}}(X_\alpha + 1)(X_\alpha^{-1} + 1)J_s^2,$$

et on conclut comme pour (i). \square

5.2 Définition: Soit $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$, $s = s_{\alpha}$. Fixons une racine carrée $c_s^{1/2}$ de c_s . D'après le lemme 5.1, il existe $\epsilon_1, \epsilon_{-1} \in \{\pm 1\}$ tels que

$$sp_1(X_{\alpha} - 1)J_s = \epsilon_1 c_s^{1/2} \frac{(1 - q^{-a_s})(1 + q^{-b_s})}{2} sp_1$$

et

$$sp_{\chi_{-1}}(X_{\alpha} + 1)J_s = \epsilon_{-1} c_s^{1/2} \frac{(1 + q^{-a_s})(1 - q^{-b_s})}{2} sp_{\chi_{-1}}.$$

Posons

$$R_s = \begin{cases} -\epsilon_1 q^{a_s+b_s} c_s^{-1/2} J_s, & \text{si } \epsilon_1 b_s \neq \epsilon_{-1} b_s; \\ -\epsilon_1 q^{a_s+b_s} c_s^{-1/2} X_{\alpha} J_s, & \text{si } \epsilon_1 b_s = \epsilon_{-1} b_s. \end{cases}$$

et

$$T_s = R_s + (q^{a_s+b_s} - 1) \frac{X_{\alpha}(X_{\alpha} - \frac{q^{b_s} - q^{a_s}}{q^{a_s+b_s} - 1})}{X_{\alpha}^2 - 1}.$$

5.3 Lemme: Un élément $A \in \text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})})$ est dans $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$, si et seulement si, pour tout $v \in i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$ et pour tout $v^{\vee} \in i_{P \cap K}^K E^{\vee}$, l'application $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M) \rightarrow \mathbb{C}$, $\chi \mapsto \langle sp_{\chi} A v, v^{\vee} \rangle$, est régulière.

Preuve: La condition est nécessaire, puisque, si $A(v) \in i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$, alors $sp_{\chi}(A(v)) \in i_P^G E_{\chi}$ pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$.

La condition est suffisante: Soit $v \in i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$. Par l'inclusion $i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}} \subseteq i_{P \cap K}^K E \otimes K(B)$, on peut écrire $Av = \sum_{i \in I} v_i \otimes b_i$ avec $b_i \in K(B)$ et les v_i \mathbb{C} -linéairement indépendants dans $i_{P \cap K}^K E$.

Soient $v_i^{\vee} \in i_{P \cap K}^K E^{\vee}$, $i \in I$, des éléments duaux aux v_i . Alors $\langle sp_{\chi}(A(v)), v_i^{\vee} \rangle = b_i$. Il en résulte donc que $b_i \in B$ pour tout $i \in I$, i.e. $Av \in i_P^G E_B \cap (i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(B_{\mathcal{O}})} = i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$. \square

5.4 Proposition: Les opérateurs $T_{s_{\alpha}}$, $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$, définis dans 5.2, appartiennent à $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$.

Preuve: Posons $s = s_{\alpha}$. Il faut montrer que T_s est régulier en tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. Écrivons $T_s = p_s J_s + r_s$ avec $p_s \in B^{\times}$ et $r_s \in K(B_{\mathcal{O}})$. Soient $v \in i_{P \cap K}^K E_{\mathcal{O}}$ et $v^{\vee} \in E^{\vee}$. L'application $\chi \mapsto \langle sp_{\chi} T_s v, v^{\vee} \rangle$ est régulière en χ , sauf peut-être si $X_{\alpha}(\chi) = 1$ ou si $X_{\alpha}(\chi) = -1$ et $b_s \neq 0$.

Remarquons d'abord que

$$\text{Res}_{X_{\alpha}=\pm 1} r_s = \frac{\pm 1}{2} (q^{a_s+b_s} - 1 - (\pm 1)(q^{b_s} - q^{a_s})).$$

La régularité en $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tel que $X_\alpha(\chi) = 1$ résulte alors de l'égalité $sp_\chi(X_\alpha - 1)p_s J_s = -q^{a_s+b_s} \frac{(1-q^{-a_s})(1+q^{-b_s})}{2} sp_\chi$, et celle en $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tel que $X_\alpha(\chi) = -1$ de l'égalité $sp_\chi(X_\alpha + 1)p_s J_s = q^{a_s+b_s} \frac{(1+q^{-a_s})(1-q^{-b_s})}{2} sp_\chi$, si $b_s \neq 0$. \square

5.5 Proposition: Soit $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}$, $s = s_\alpha$. Alors $(T_s + 1)(T_s - q^{a_s+b_s}) = 0$.

Preuve: Soit T_s un opérateur de la forme $p_s J_s + r_s$ avec $p_s \in \mathbb{C}^\times$ et $r_s \in K(B)$. Alors

$$\begin{aligned} (T_s + 1)(T_s - q^{a_s+b_s}) &= T_s^2 + (1 - q^{a_s+b_s})T_s - q^{a_s+b_s} \\ &= (r_s + {}^s r_s + 1 - q^{a_s+b_s})p_s J_s \\ &\quad + p_s^2 J_s^2 + r_s^2 + (1 - q^{a_s+b_s})r_s - q^{a_s+b_s}. \end{aligned}$$

Comme 1 et J_s sont $K(B)$ -linéairement indépendants, l'équation $(T_s + 1)(T_s - q^{a_s+b_s}) = 0$ équivaut à

$$r_s + {}^s r_s + 1 - q^{a_s+b_s} = 0 \quad \text{et} \quad p_s^2 J_s^2 + r_s^2 + (1 - q^{a_s+b_s})r_s - q^{a_s+b_s} = 0.$$

Pour T_s défini comme ci-dessus dans le cas $\epsilon_1 b_s \neq \epsilon_{-1} b_s$, la vérification de ces identités se fait par un calcul élémentaire. Le cas $\epsilon_1 b_s = \epsilon_{-1} b_s$ en résulte, puisque $(X_\alpha J_s)(X_\alpha J_s) = J_s^2$. \square

5.6 Définition: Fixons pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$ une décomposition réduite en symétries simples $w = s_1 \cdots s_l$ et définissons $T_w = T_{s_1} \cdots T_{s_l}$. (En particulier, $T_1 = id$.)

5.7 Proposition: Soient $w, w' \in W_{\mathcal{O}}$.

(i) Si $l_{\mathcal{O}}(ww') = l_{\mathcal{O}}(w) + l_{\mathcal{O}}(w')$, alors $T_w T_{w'}$ est de la forme $b_{w,w'} J_{ww'} + \sum_{w''} f_{w,w',w''} J_{w''}$, avec $b_{w,w'} \in B_{\mathcal{O}}^\times$ et $f_{w,w',w''} \in K(B_{\mathcal{O}})$, $f_{w,w',w''} = 0$ lorsque $l_{\mathcal{O}}(w'') \geq l_{\mathcal{O}}(ww')$.

(ii) Si $l_{\mathcal{O}}(ww') < l_{\mathcal{O}}(w) + l_{\mathcal{O}}(w')$, alors $T_w T_{w'}$ est de la forme $\sum_{w''} f_{w,w',w''} J_{w''}$ avec $f_{w,w',w''} \in K(B_{\mathcal{O}})$, $f_{w,w',w''} = 0$ lorsque $l_{\mathcal{O}}(w'') \geq l_{\mathcal{O}}(w) + l_{\mathcal{O}}(w')$.

Preuve: Ceci résulte directement de la définition de T_w et de 4.7 (i), (ii). \square

5.8 Lemme: Soit $w' \in W_{\mathcal{O}}$ et notons w_0 l'élément le plus long dans $W_{\mathcal{O}}$. Supposons pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$ donné un opérateur $T_{w,w'}$ dans $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ de la forme $\sum_{w''} f_{w,w',w''} J_{w''}$, avec $f_{w,w'} \in K(B_{\mathcal{O}})$, $f_{w,w_0} = 0$ si $w \neq w'$ et $f_{w',w_0} \in B_{\mathcal{O}}^\times$. Soit $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ et soient $c_{r,w}$, $r \in R(\mathcal{O})$, $w \in W_{\mathcal{O}}$, des nombres complexes tels que $\sum_{r,w} c_{r,w} sp_\chi J_r T_{w,w'} = 0$. Alors $c_{1,w'} = 0$.

Preuve: Fixons un sous-groupe H de G vérifiant les propriétés indiquées dans [H, 5.] relatives à P et \mathcal{O} . Fixons un élément $v \neq 0$ de $(i_{P \cap K}^K E)^H$ de support contenu dans $(P \cap K)H$ et à valeurs dans E_1 . Il s'identifie donc à l'élément de $i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}$ défini pour $m \in M$, $u \in U$ et $k \in K$ par $muk \mapsto \delta_P^{1/2} \sigma_B(m) v(k)$. Soit v^\vee un élément de $(i_{\overline{P} \cap K}^K E^\vee)^H$ de support contenu dans $(\overline{P} \cap K)H$. On suppose que v^\vee a été choisi tel que $\langle v(1), v^\vee(1) \rangle \neq 0$. L'opérateur rationnel $J_{P|\overline{w_0}P} \lambda(w_0)$ est régulier sur \mathcal{O}^\vee par **1.10** (où w_0 désigne l'élément de longueur maximale de $W_{\mathcal{O}}$). Posons $A = J_{P|\overline{w_0}P}(\sigma \otimes \cdot) \lambda(w_0)$.

On déduit de [H, 5.3] (où il faut inverser les rôles de v et v^\vee) que, pour $w \in W(M, \mathcal{O})$, $\langle J_{P|wP}(\sigma \otimes \chi') \lambda(w) \rho_w v, A(\chi') \rho_{w_0}^\vee v^\vee \rangle$ est une fonction constante en χ' qui ne peut être $\neq 0$ que si $w = w_0$. Si $w = w_0$, alors sa valeur est de la forme $c_w \langle v(1), v^\vee(1) \rangle$, où c_w est un nombre complexe $\neq 0$ qui ne dépend pas de v et v^\vee .

Supposons $\sum_{r,w} c_{r,w} sp_\chi J_r T_{w,w'} = 0$. Alors,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{r,w} c_{r,w} J_r T_{w,w'} v, A \rho_{w_0}^\vee v^\vee \right\rangle \\ &= \sum_{r,w} \sum_{w''} \langle c_{r,w} J_r f_{w,w''} J_{w''} v, A \rho_{w_0}^\vee v^\vee \rangle \\ &= \sum_{r,w} \sum_{w''} c_{r,w} f_{w,w''} \langle J_r J_{w''} v, A \rho_{w_0}^\vee v^\vee \rangle \end{aligned}$$

Observons maintenant que, d'après le lemme **3.2** et la preuve de **3.3**, pour $w \in W_{\mathcal{O}}$, $r \in R(\mathcal{O})$ et $\chi' \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ un point régulier, et compte tenu de la définition de $J_r J_w$, $sp_{\chi'} J_r J_w v$ est le produit d'un nombre complexe non nul avec

$$\begin{aligned} & \rho_{\sigma, rw} \lambda(rw) J_{w^{-1}r^{-1}P|P}(\sigma \otimes (w^{-1}r^{-1}\chi')) sp_{w^{-1}r^{-1}\chi'} v \\ &= \rho_{\sigma, rw} J_{P|rwP}(rw\sigma \otimes \chi') \lambda(rw) v \\ &= J_{P|rwP}(\sigma \otimes \chi') \lambda(rw) \rho_{\sigma, rw} v, \end{aligned}$$

les propriétés de commutations pour $\rho_{\sigma, rw}$ par rapport à $J_{P|rwP}(\cdot) \lambda(rw)$ résultant du fait que celui-ci est défini par functorialité à partir d'un isomorphisme entre des représentations dans E (cf. **2.5**).

D'après ce qui précède, on voit que le produit $\langle J_{P|rwP}(\sigma \otimes \chi') \lambda(rw) \rho_{\sigma, rw} v, A(\chi') \rho_{w_0}^\vee v^\vee \rangle$ est nul, sauf si $r = 1$ et $w = w_0$, et alors sa valeur est par choix de v^\vee non nulle égale à $c_{w_0} \langle v(1), v^\vee(1) \rangle =: c$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{r,w} sp_\chi c_{r,w} J_r T_{w,w'} v, A(\chi) \rho_{w_0}^\vee v^\vee \right\rangle \\ &= c_{1,w'} f_{w',w_0}(\chi) c. \end{aligned}$$

Comme $f_{w',w_0} \in B^\times$, on a $f_{w',w_0}(\chi) \neq 0$, et il en résulte que $c_{1,w'} c = 0$, d'où $c_{1,w'} = 0$. \square

5.9 Proposition: *Pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$, les opérateurs $sp_\chi J_r T_w$, $r \in R(\mathcal{O})$, $w \in W_{\mathcal{O}}$, sont linéairement indépendants.*

Preuve: Soit $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. On va d'abord prouver par récurrence décroissante sur l , $0 \leq l \leq l_{\mathcal{O}}(w_0)$, que, lorsque $c_{r,w}$, $r \in R(\mathcal{O})$, $w \in W_{\mathcal{O}}$, sont des nombres complexes tels que $\sum_{r,w} c_{r,w} sp_\chi J_r T_w = 0$, alors $c_{1,w} = 0$ pour tout w de longueur supérieure ou égale à l .

Il résulte du lemme précédent et de **5.7** (en posant $w' = 1$) que cette affirmation est vraie pour $l = l(w_0)$. Soit donc $0 \leq l < l(w_0)$ et supposons-la vraie pour $l + 1$. Soient $c_{r,w}$ des nombres complexes tels que $\sum_{r,w} c_{r,w} sp_\chi J_r T_w = 0$. On a donc $c_{1,w} = 0$ lorsque $l(w) > l$. Soit $w_1 \in W_{\mathcal{O}}$ tel que $l(w_1) = l$. Posons $w' = w_1^{-1} w_0$ et $A := \sum_{r,w} c_{r,w} J_r T_w$. Par hypothèse, $sp_\chi A = 0$ et donc $sp_\chi A T_{w'} = 0$.

D'autre part,

$$A T_{w'} = \sum_{r,w} c_{r,w} J_r (T_w T_{w'}).$$

On va déduire du lemme **5.8** que $c_{1,w_1} = 0$. Si $l(w) > l$, alors $c_{1,w} = 0$ par hypothèse de récurrence. Si $l(w) = l$, alors $l(w w') \leq l(w) + l(w') = l(w_0)$, puisque par [B, VI, paragraphe 1, Cor. 3], $l(w') = l(w_0) - l$. Par la proposition **5.7**, $T_w T_{w'}$ est, pour $l(w) \leq l$ et $w \neq w_1$, combinaison $K(B_{\mathcal{O}})$ -linéaire d'opérateurs $J_{w''}$, $l(w'') < l(w_0)$, alors que $T_{w_1} T_{w'}$ est de la forme $f_{w_1, w_0} J_{w_0} + \sum_{w'' \neq w_0} f_{w_1, w''} J_{w''}$ avec $f_{w_1, w_0} \in B_{\mathcal{O}}^\times$ et $f_{w_1, w''} \in K(B_{\mathcal{O}})$. Les hypothèses du lemme **5.8** sont donc bien vérifiées, et, par suite, $c_{1,w_1} = 0$.

Déduisons-en maintenant que $c_{r',w} = 0$ pour tout $r' \in R(\mathcal{O})$ et $w \in W_{\mathcal{O}}$. Soit $r' \in R$. Remarquons que $T_w J_{r'^{-1}} = J_{r'^{-1}} T_{r' w r'^{-1}}$ par **3.5**.

Comme $0 = sp_\chi A J_{r'^{-1}}$ et, d'autre part,

$$A J_{r'^{-1}} = \sum_{r,w} c_{r,w} J_r J_{r'^{-1}} T_{r' w r'^{-1}},$$

on trouve, en utilisant **4.7** (iii),

$$0 = sp_\chi A J_{r'^{-1}} = \sum_{r,w} c_{r,r'^{-1} w r'} sp_\chi J_{r r'^{-1}} T_w.$$

Par ce qui a été montré dans la première partie, il en résulte bien que $c_{r',w} = 0$ pour tout $w \in W_{\mathcal{O}}$. \square

5.10 Théorème:

$$\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}) = \bigoplus_{r \in R(\mathcal{O}), w \in W_{\mathcal{O}}} B_{\mathcal{O}} J_r T_w.$$

Preuve: Il est clair par définition et **5.4** que l'espace de droite est inclus dans l'espace de gauche.

D'autre part, par le théorème **4.9** et **5.7**, l'espace de gauche est inclus dans $\bigoplus_{r,w} K(B_{\mathcal{O}})J_r T_w$. Il suffit donc de prouver qu'une combinaison linéaire de la forme $A := \sum_{r,w} b^{-1} b_{r,w} J_r T_w$ avec $b_{r,w}$ et b dans $B_{\mathcal{O}}$ est dans $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$, si et seulement si b divise tous les $b_{r,w}$ dans $B_{\mathcal{O}}$.

On se ramène au cas où b et $b_{r,w}$ sont premiers entre eux dans $B_{\mathcal{O}}$. Il faut alors prouver que b est une unité. Supposons par l'absurde que b n'est pas une unité. L'anneau $B_{\mathcal{O}}$ étant factoriel, il suffit de considérer le cas où b est irréductible. Alors il existe au moins un élément $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ tel que $b(\chi) = 0$, alors que $b_{r,w}(\chi) \neq 0$ pour au moins un couple (r, w) . Comme $0 = sp_{\chi} b A = \sum_{r,w} b_{r,w}(\chi) sp_{\chi} J_r T_w$, ceci contredit la proposition **5.9** qui dit que les opérateurs $sp_{\chi} J_r T_w$ sont \mathbb{C} -linéairement indépendants pour tout $\chi \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$. \square

5.11 Corollaire: *Le centre $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ de $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ est formé des éléments $W(M, \mathcal{O})$ -invariants dans $B_{\mathcal{O}}$.*

Preuve: En effet, supposons $\sum_{r,w} b_{r,w} J_r J_w$ dans le centre. Alors, pour tout $r \in R(\mathcal{O})$, $w \in W_{\mathcal{O}}$, $b \in B_{\mathcal{O}}$, $bb_{r,w} = {}^{rw}bb_{r,w}$. Par suite, $b_{r,w} = 0$ si $rw \neq 1$. Le centre de $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ est donc contenu dans $B_{\mathcal{O}}$, et il est alors clair que c'est $B_{\mathcal{O}}^{W(M, \mathcal{O})}$. \square

5.12 Notons $K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})$ le corps de fractions de $\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}$ et posons $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})} = \text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}) \otimes_{\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}} K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})$.

Corollaire: *L'algèbre $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})}$ est un $K(B_{\mathcal{O}})$ -module qui est canoniquement isomorphe à $\text{Hom}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}}, i_P^G E_{K(B_{\mathcal{O}})})$.*

Preuve: Remarquons tout d'abord que $B_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{Z}_{\mathcal{O}}} K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})$ est canoniquement isomorphe à $K(B_{\mathcal{O}})$ (cf. [L]). Il en résulte par **5.10** que $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})}$ est isomorphe à $\bigoplus_{r,w} K(B_{\mathcal{O}})J_r T_w$, d'où le corollaire par **4.9** et **5.7**. \square

6. Rappelons que l'on a défini en **1.5** pour tout $\alpha \in \Delta_{\sigma, \mu}$ un élément h_{α} dans $M \cap M_{\alpha}^1$ et un nombre réel t_{α} . Posons $\tilde{\alpha} := H_M(h_{\alpha}^{t_{\alpha}})$. Désignons par $\Lambda_{\mathcal{O}}$ le \mathbb{Z} -module libre dans a_M égal à l'image de M^{σ}/M^1 par H_M , par $\Lambda_{\mathcal{O}}^{\vee}$ le \mathbb{Z} -module libre inclus dans a_M^* qui est par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en dualité parfaite avec $\Lambda_{\mathcal{O}}$, par $\Sigma_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des $\tilde{\alpha}$, $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, et, finalement, par $\Sigma_{\mathcal{O}}^{\vee}$ l'ensemble des multiples α^* de α , $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O}, \mu}$, tels que $\langle \alpha^*, \tilde{\alpha} \rangle = 2$.

6.1 Proposition: *Le quadruplet $(\Lambda_{\mathcal{O}}, \Sigma_{\mathcal{O}}, \Lambda_{\mathcal{O}}^{\vee}, \Sigma_{\mathcal{O}}^{\vee})$ est une donnée radicielle. Le*

système de racines sous-jacent est réduit. Le groupe de Weyl de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est canoniquement isomorphe à $W_{\mathcal{O}}$, et l'ensemble $\Delta_{\mathcal{O}} = \{H_M(h_{\alpha}^{t_{\alpha}}), \alpha \in \Delta_{\mathcal{O},\mu}\}$ forme une base de $\Sigma_{\mathcal{O}}$.

Par ailleurs, si Σ'_{μ} est une composante irréductible de $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$, et si Σ'_{μ} n'est pas de type C_n , alors l'ensemble des $\tilde{\alpha}$, $\alpha \in \Sigma'_{\mu}$, est une composante irréductible de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ qui est du même type que Σ' . Dans le cas contraire, la composante irréductible correspondante de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ est de type B_n .

D'abord un lemme:

6.2 Lemme: Soit $\alpha \in \Sigma_{\mathcal{O},\mu}$. Notons m_{α} le plus grand nombre > 0 , tel que $\chi_{\frac{2\pi i}{m_{\alpha} \log q} \alpha} \in \mathfrak{X}^{\text{nr}}(M_{\alpha})$. Alors $H_M(h_{\alpha}) = \frac{m_{\alpha}}{2} \alpha^{\vee}$.

Preuve: Écrivons $H_M(h_{\alpha}) = \frac{m}{2} \alpha^{\vee}$ avec $m > 0$. Alors

$$1 = \chi_{\frac{2\pi i}{m_{\alpha} \log q} \alpha}(h_{\alpha}) = q^{-\langle \frac{2\pi i}{m_{\alpha} \log q} \alpha, H_M(h_{\alpha}) \rangle} = q^{-\frac{2\pi i}{\log q} \frac{m}{m_{\alpha}}}.$$

Il s'ensuit que $m \in m_{\alpha} \mathbb{Z}$. Mais, alors, grâce à la maximalité de m_{α} , il faut que $m_{\alpha} = m$. \square

Preuve: (de la proposition) Fixons une composante $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ de $\Sigma_{\mathcal{O},\mu}$, et notons $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ sa base. Rappelons que $d = d_i$, sauf si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type A_d . Alors $d = d_i - 1$. Un élément de $\mathfrak{X}^{\text{nr}}(M)$ est de la forme $|\det_{m_1}|^{s_{1,1}} \otimes \dots \otimes |\det_{m_1}|^{s_{1,d_1}} \otimes |\det_{m_2}|^{s_{2,1}} \otimes \dots \otimes |\det_{m_2}|^{s_{2,d_2}} \otimes \dots \otimes |\det_{m_r}|^{s_{r,1}} \otimes \dots \otimes |\det_{m_r}|^{s_{r,d_r}} \otimes 1$, où les $s_{i,j}$ sont des nombres complexes. Pour $j = 1, \dots, d_i - 1$, χ_{α_j} est donnée par $s_{i,j} = 1/m_i$, $s_{i,j+1} = -1/m_i$, les autres exposants $s_{i',j'}$ étant nuls. Si $d = d_i$, alors χ_{α_d} est donné par $s_{i,d} = 1/m_i$ et $s_{i,d-1} = 0$ (resp. $s_{i,d-1} = 1/m_i$), si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type B_d (resp. D_d), et par $s_{i,d} = 2/m_i$ si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type C_d , les autres exposants étant nuls.

Fixons une uniformisante $\tilde{\omega}$ de F . On peut choisir $h_{\alpha_j} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}^{-1}, 1, \dots, 1)$ pour $j = 1, \dots, d_i - 1$, et, si $d = d_i$, $h_{\alpha_d} = \text{diag}(1, \dots, 1, \tilde{\omega}, 1, \dots, 1)$ si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type B_d ou C_d , et $h_{\alpha_d} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, \tilde{\omega}, \tilde{\omega}, 1, \dots, 1)$ si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type D_d , $\tilde{\omega}$ se trouvant chaque fois à la dernière place sur la diagonale de la $j^{\text{ème}}$ (ou $d^{\text{ème}}$) copie de GL_{m_i} .

Posons $\epsilon = 2$, si $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ est de type B_d , $\epsilon = 1$ sinon. Alors, on en déduit $m_{\alpha_j} = 2m_i^{-1}$ pour $j = 1, \dots, d_i - 1$, et, si $d = d_i$, $m_{\alpha_d} = \frac{2}{\epsilon} m_i^{-1}$. Si t_i désigne l'ordre du stabilisateur de σ_i , on a par ailleurs $t_{\alpha_j} = t_i$ pour $j = 1, \dots, d$. Par suite, grâce au lemme 6.2,

$$\Delta_{\mathcal{O},i} = \left\{ \frac{t_i}{m_i} \alpha_1^{\vee}, \dots, \frac{t_i}{m_i} \alpha_{d_i-1}^{\vee}, \frac{t_i}{\epsilon m_i} \alpha_d^{\vee} \right\}.$$

Ce sont des éléments de $\Lambda_{\mathcal{O}} = H_M(M^{\sigma}/M^1)$, puisque par construction ces éléments sont de la forme $H_M(h_{\alpha}^{t_{\alpha}})$, $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O},\mu}$, alors que $h_{\alpha}^{t_{\alpha}} \in M^{\sigma}$ d'après 1.13, en remarquant que le groupe $\text{Stab}(\mathcal{O})$ opère d'après la définition 1.5 trivialement sur les $h_{\alpha}^{t_{\alpha}}$.

On pose $\Delta_{\mathcal{O},i}^\vee = \{\frac{m_i}{t_i}\alpha_1, \dots, \frac{m_i}{t_i}\alpha_{d_i-1}, \frac{\epsilon m_i}{t_i}\alpha_{d_i}\}$. On a $\Delta_{\mathcal{O},i}^\vee \subseteq \Lambda_{\mathcal{O}}^\vee$: observons d'abord que les groupes $\mathrm{GL}_{m_i}/(\mathrm{GL}_{m_i})^1$ sont cycliques. Le groupe $(\mathrm{GL}_{m_i})^{\sigma_i}/(\mathrm{GL}_{m_i})^1$ en est un sous-groupe d'indice t_i (car $(\mathrm{GL}_{m_i}/(\mathrm{GL}_{m_i})^1)^{t_i} = (\mathrm{GL}_{m_i})^\sigma/(\mathrm{GL}_{m_i})^1$), et le groupe M^σ/M^1 est un produit de tels groupes. Il est clair que les caractères rationnels $m_i\alpha_j$, considérés comme éléments de a_M^* , envoient l'image de M par H_M dans \mathbb{Z} . Comme les éléments de $\Delta_{\mathcal{O},i}^\vee$ sont triviaux sur les facteurs GL_{m_j} , $j \neq i$, il en résulte suit que les $\frac{m_i}{t_i}\alpha_j$ envoient M^σ/M^1 dans \mathbb{Z} , i.e. ce sont des éléments de $\Lambda_{\mathcal{O}}^\vee$.

On voit que le système des racines obtenu est du même type que $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$ sauf dans le cas où celui-ci est de type C_d . Alors, on trouve un système équivalent au système dual de $\Sigma_{\mathcal{O},\mu,i}$. Il est donc de type B_d . \square

7. On va maintenant faire le lien avec les algèbres de Hecke avec paramètres.

7.1 Rappelons d'abord la notion d'algèbre de Hecke avec paramètres définie dans [L].

Soit $(\Lambda, \Lambda^\vee, \Sigma, \Sigma^\vee, \Delta)$ un quintuplet, où Λ et Λ^\vee sont des groupes abéliens libres de type fini en dualité par une application \mathbb{Z} -bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Lambda \times \Lambda^\vee \rightarrow \mathbb{Z}$, $\Sigma \subseteq \Lambda$ un système de racines, Δ une base de Σ et $\Sigma^\vee \subseteq \Lambda^\vee$ le système de racines dual de Σ , la dualité étant donné par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Désignons par $W(\Sigma)$ le groupe de Weyl de Σ . Notons $\Sigma_1, \dots, \Sigma_r$ les composantes irréductibles de Σ et $\Delta_i := \Delta \cap \Sigma_i$. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, supposons donné un ensemble $\{q_\alpha, \alpha \in \Delta_i\}$ de nombres réels > 1 tels que $q_\alpha = q_\beta$, si α et β sont conjugués par un élément du groupe de Weyl de Σ_i . Si Σ_i est de type B_n , on se donne en outre un nombre réel $q_i > 1$.

Lorsque α est dans Σ , désignons par s_α la symétrie élémentaire de Λ associée à α , et, pour $\alpha, \beta \in \Sigma$, par $m(\alpha, \beta)$ l'ordre de $s_\alpha s_\beta$.

Considérons le groupe $B_0(\Sigma)$ de générateurs U_{s_α} , $\alpha \in \Delta$, avec les relations de tresse $U_{s_\alpha} U_{s_\beta} U_{s_\alpha} \cdots = U_{s_\beta} U_{s_\alpha} U_{s_\beta} \cdots$ ($m(\alpha, \beta)$ facteurs) pour tous $\alpha, \beta \in \Delta$. Remarquons qu'alors $U_{s_{\alpha_1}} \cdots U_{s_{\alpha_r}} = U_{s_{\beta_1}} \cdots U_{s_{\beta_r}}$, lorsque $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ et $s_{\beta_1} \cdots s_{\beta_r}$ sont des décompositions réduites d'un même élément w de $W(\Sigma)$ [Sp, 8.3.3]. On peut donc poser $U_w := U_{s_{\alpha_1}} \cdots U_{s_{\alpha_r}}$. Notons $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ le quotient de l'algèbre de groupe de $B_0(\Sigma)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments $(U_{s_\alpha} + 1)(U_{s_\alpha} - q_\alpha)$, $\alpha \in \Delta$.

Notons $C = \mathbb{C}[\Lambda]$ l'algèbre de groupe de Λ et Z_λ l'élément de C associé à $\lambda \in \Lambda$.

On appellera *algèbre de Hecke avec paramètres* $\{q_\alpha\}$ et $\{q_i\}$, et on notera $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\Sigma, \{q_\alpha\}, \{q_i\})$ la \mathbb{C} -algèbre qui, en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel est engendrée par $U_w Z_\lambda$, w et λ parcourant respectivement $W(\Sigma)$ et Λ . La multiplication dans $\mathcal{H}(\Sigma, \{q_\alpha\}, \{q_i\})$ est déduite de celle dans $\mathcal{H}_0(\Sigma)$ et de celle dans C avec la règle de

commutation

$$Z_\lambda U_{s_\alpha} - U_{s_\alpha} Z_{s_\alpha \lambda} = \begin{cases} (q_\alpha - 1) \frac{Z_\lambda - Z_{s_\alpha(\lambda)}}{1 - Z_{-\alpha}}, & \text{si } \alpha^\vee \notin 2\Lambda^\vee, \\ (q_\alpha - 1 + Z_{-\alpha}((q_\alpha q_i)^{1/2} - (q_\alpha q_i^{-1})^{1/2})) \frac{Z_\lambda - Z_{s_\alpha(\lambda)}}{1 - Z_{-2\alpha}}, & \text{sinon;} \end{cases}$$

pour $\alpha \in \Delta$ et $\lambda \in \Lambda$.

Ceci est bien défini parce que $\alpha^\vee \in 2\Lambda^\vee$ est équivalent à dire que la composante irréductible Σ_i de Σ à laquelle α appartient est de type B_n et que α est la racine courte dans $\Delta \cap \Sigma_i$.

Notons \mathcal{Z} le centre de \mathcal{H} , $K(\mathcal{Z})$ son corps des fractions, et posons $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})} = \mathcal{H} \otimes_{\mathcal{Z}} K(\mathcal{Z})$. Suivant [L, 3.12], on a $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})} = \bigoplus_{w \in W(\Sigma)} K(C) U_w$, où $K(C)$ désigne le corps des fractions de C .

7.2 Lemme: Soient $\alpha, \alpha' \in \Delta_\mathcal{O}$, $s = s_\alpha$, $s' = s_{\alpha'}$, et $m \in \mathbb{Z}$ tels que $(ss')^m = 1$. Supposons ou que $b_s = b_{s'} = 0$, ou que s et s' commutent, ou bien que α et α' engendrent un système de racines de type B_2 , que α' soit la racine courte et que $b_s = 0$. Alors $T_s T_{s'} T_s \cdots = T_{s'} T_s T_{s'} \cdots$, le nombre de facteurs de chaque côté étant m .

Remarque: Il semblerait que les conclusions du lemme ci-dessus deviennent fausses, si on omet une des hypothèses.

Preuve: Le système de racines Σ_1 engendré par α et α' est réduit de rang 2. S'il est réductible, il est de type $A_1 \times A_1$, et J_s et $J_{s'}$ commutent. Mais, alors T_s et $T_{s'}$ commutent également, et l'assertion est triviale.

Sinon, Σ_1 est de type A_2 , B_2 ou G_2 . Sans perte de généralité, on peut supposer que la racine α' est au plus aussi longue que α . Notons m l'ordre de $s_\alpha s_{\alpha'}$. On pose $q_\alpha = q^{a_s}$, $q_{\alpha'} = q^{a_{s'} + b_{s'}}$ et $q_0 = q^{a_{s'} - b_{s'}}$. Considérons le quintuplet $(\Lambda_\mathcal{O}, \Lambda_\mathcal{O}^\vee, \Sigma_1, \Sigma_1^\vee, \{\alpha, \alpha'\})$ et l'algèbre de Hecke à paramètres $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Sigma_1, \{q_\alpha, q_{\alpha'}\}, \{q_0\})$ associée. Remarquons que $\mathbb{C}[\Lambda_\mathcal{O}]$ s'identifie à $B_\mathcal{O}$. Notons \mathcal{Z} le centre de \mathcal{H} . L'algèbre $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})}$ est donc un $K(B_\mathcal{O})$ -module.

Avec les notations de 7.1, posons

$$j_\alpha = \frac{q_\alpha - Z_\alpha}{1 - Z_\alpha} \quad \text{et} \quad j_{\alpha'} = \frac{(q_{\alpha'}^{1/2} q_0^{1/2} - Z_{\alpha'})(Z_{\alpha'} + q_{\alpha'}^{1/2} q_0^{-1/2})}{1 - Z_{\alpha'}^2}.$$

Pour $P \in C$, $\beta \in \{\alpha, \alpha'\}$ et $t = s_\beta$, les règles de commutation impliquent que

$$P(U_\beta - q_\beta) - (U_\beta - q_\beta) {}^t P = ({}^t P - P) j_\beta. \quad (*)$$

Si $\beta \in \Sigma_1$ est conjugué à α (resp. α'), posons $j_\beta = j_\alpha(Y_\beta)$ (resp. $j_\beta = j_{\alpha'}(Y_\beta)$).

Dans $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})}$, posons $S_s = U_s - q_\alpha + j_\alpha$, $S_{s'} = U_{s'} - q_{\alpha'} + j_{\alpha'}$, et, lorsque $w \in W(\Sigma_1)$ et que $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ est une décomposition réduite de w , $S_w = S_{\alpha_1} \cdots S_{\alpha_r}$.

Ceci ne dépend pas de la décomposition réduite choisie [R, 4.3]. Alors, pour tout $w, w' \in W(\Sigma_1)$,

$$S_w S_{w'} = \left(\prod_{\beta} j_{\beta} j_{-\beta} \right) S_{ww'},$$

le produit portant sur l'ensemble des $\beta \in \Sigma_1^+$ tels que $w^{-1}\beta < 0$ et $w'^{-1}w^{-1}\beta > 0$ [R, 4.3].

On va montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})} \rightarrow \text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})_{K(\mathcal{Z}_{\mathcal{O}})}$ qui envoie S_s sur R_s , $S_{s'}$ sur $R_{s'}$ et qui induit l'identité sur $K(B_{\mathcal{O}})$. Il en suivra la relation $T_s T_{s'} / T_s \cdots = T_{s'} T_s T_{s'} \cdots$, le nombre de facteurs de chaque côté étant égal à l'ordre ss' , puisque $U_s \mapsto T_s$ et que $U_{s'} \mapsto T_{s'}$.

Comme les opérateurs S_s et $S_{s'}$ engendrent ensemble avec $K(B_{\mathcal{O}})$ l'algèbre $\mathcal{H}_{K(\mathcal{Z})}$, l'unicité est évidente. Il reste à prouver l'existence, i.e. que $R_s, R_{s'}$ vérifient les mêmes relations que $S_s, S_{s'}$.

La vérification des relations de commutation (*) est un calcul élémentaire. Il en est de même des identités $R_s^2 = j_{\alpha} j_{-\alpha}$ et $R_{s'}^2 = j_{\alpha'} j_{-\alpha'}$. Il reste à vérifier que, lorsque $w \in W(\Sigma_1)$ et que $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$ est une décomposition en symétries simples de w , alors $R_{s_{\alpha_1}} \cdots R_{s_{\alpha_r}}$ est indépendant du choix de cette décomposition. Pour cela, on va étudier les différents cas. En fait, si $m(s, s')$ désigne l'ordre de ss' , il suffit de montrer que $R_s R_{s'} R_s \cdots = R_{s'} R_s R_{s'} \cdots$, le nombre de facteurs de chaque côté étant $m(s, s')$ [Sp, 8.3.3].

Si Σ_1 est de type A_2 ou G_2 , alors $b_{s'} = 0$ par hypothèse et $c_{s'} = c_s$, puisque s et s' sont conjugués. Les relations ci-dessus sont alors une conséquence directe du corollaire 3.4.

Supposons maintenant Σ_1 de type B_2 . Il faut montrer que $R_{s_1} R_{s_2} R_{s_1} R_{s_2} = R_{s_2} R_{s_1} R_{s_2} R_{s_1}$. Comme chaque facteur R_{s_i} apparaît avec la même multiplicité, les facteurs scalaires sont égaux. On est donc ramené à l'égalité $X_{\alpha} J_{s_{\alpha}} X_{\alpha'} J_{s_{\alpha'}} X_{\alpha} J_{s_{\alpha}} X_{\alpha'} J_{s_{\alpha'}} = X_{\alpha'} J_{s_{\alpha'}} X_{\alpha} J_{s_{\alpha}} X_{\alpha'} J_{s_{\alpha'}} X_{\alpha} J_{s_{\alpha}}$ qui résulte du lemme 2.7. \square

7.3 Proposition: *Lorsque Σ_i est une composante irréductible de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ et que $\alpha \in \Delta \cap \Sigma_i$, alors $b_{s_{\alpha}} \neq 0$ implique que Σ_i est de type B_n et que α correspond à la racine courte de B_n .*

Preuve: Il résulte des travaux de Bernstein-Zelevinsky [BZ] et, dans le cas d'une algèbre simple, de [T] que $b_{s_{\alpha}} = 0$ si la fonction $\mu^{M_{\alpha}}$ est égale à celle pour un groupe linéaire général ou le groupe multiplicatif d'une algèbre simple. Ceci est également vrai pour $\text{SL}_2(F)$ et $\text{PGL}_2(F)$. Or, dans les autres cas, Σ_i est, d'après 1.13 et 6.1, de type B_n et α est la racine courte. \square

7.4 Lorsque Σ_i est une composante irréductible de $\Sigma_{\mathcal{O}}$, désignons par α_i l'unique racine dans $\Delta \cap \Sigma_i$ telle que $\alpha_i^{\vee} \in 2\Lambda_{\mathcal{O}}^{\vee}$, si une telle racine existe.

Proposition: *L'algèbre $\bigoplus_{w \in W_{\mathcal{O}}} B_{\mathcal{O}} T_w$ est une algèbre de Hecke avec paramètres $\{q^{a_{s_{\alpha}}+b_{s_{\alpha}}}\}$ et $\{q^{a_i-b_i}\}$, où i correspond aux différentes composantes irréductibles de $\Sigma_{\mathcal{O}}$ et où a_i (resp. b_i) est égal à $a_{s_{\alpha_i}}$ (resp. $b_{s_{\alpha_i}}$).*

Preuve: La seule propriété qui reste à vérifier est la règle de commutation. C'est un calcul élémentaire. \square

7.5 Remarquons que les valeurs possibles pour les paramètres a_s et b_s sont bien connues pour les groupes considérés ici : l'ordre du groupe des caractères non ramifiés qui stabilisent la classe d'isomorphie d'une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F)$ est un diviseur de n . (Ceci résulte de la correspondance locale de Langlands [HT].) On a un résultat similaire dans le cas des algèbres simples par la correspondance de Jacquet-Langlands [DKV].

Dans le cas où G est égal à $\mathrm{GL}_n(F)$ ou le groupe multiplicatif d'une algèbre simple, on en déduit les valeurs de a_s et b_s directement des travaux cités dans la preuve de **7.3**. Pour H_k un groupe symplectique ou orthogonal et $\sigma \otimes \tau$ une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F) \times H_k$ telle que $\mu(\sigma \otimes \tau) = 0$, C. Mœglin [M] a récemment déduit des travaux de J. Arthur que le nombre $a > 0$ tel que $\sigma|_{\det_n|_F^a} \otimes \tau$ soit un pôle de μ est un demi-entier. Par ailleurs, si χ est un caractère unitaire non ramifié tel que la fonction μ s'annule également en $\sigma\chi \otimes \tau$, alors le nombre réel $b > 0$ tel que $(\sigma\chi)|_{\det|_F^b} \otimes \tau$ soit un pôle de μ multiplié par l'ordre du stabilisateur t de σ est un entier si et seulement si ta l'est. A part cela, à moins que σ et $\sigma\chi$ soient isomorphes, la valeur de b n'est en général pas conditionnée par celle de a .

7.6 Proposition: *Soit $w \in W_{\mathcal{O}}$ et $r \in R(\mathcal{O})$. Alors $r^{-1}wr \in W_{\mathcal{O}}$ et $T_w J_r = J_r T_{r^{-1}wr}$.*

Preuve: Il suffit de considérer le cas où w est une symétrie simple s_{α} et de montrer que $r^{-1}s_{\alpha}r$ est également une symétrie simple. Or, comme par définition r laisse $\Sigma_{\mathcal{O}} \cap \Sigma(P)$ invariant, il en est de même pour $\Delta_{\mathcal{O}}$, et, par suite, $r^{-1}s_{\alpha}r = s_{r\alpha}$ est une symétrie simple. \square

7.7 Théorème: *L'algèbre $\mathrm{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{C}[R(\mathcal{O})] \ltimes \mathcal{H}(\Sigma_{\mathcal{O}}, \{q^{a_{s_{\alpha}}+b_{s_{\alpha}}}\}, \{q^{a_i-b_i}\})$ de l'algèbre de groupe de $R(\mathcal{O})$ avec l'algèbre de Hecke avec paramètres $\{q^{a_{s_{\alpha}}+b_{s_{\alpha}}}\}$ et $\{q^{a_i-b_i}\}$.*

Preuve: C'est une conséquence immédiate de **5.10**, **7.4** et de **7.6**. \square

7.8 Corollaire: *La catégorie $\mathrm{Rep}^W(\mathcal{O})$ est isomorphe à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre $\mathbb{C}[R(\mathcal{O})] \ltimes \mathcal{H}(\Sigma_{\mathcal{O}}, \{q^{a_{s_{\alpha}}+b_{s_{\alpha}}}\}, \{q^{a_i-b_i}\})$.*

Preuve: C'est une conséquence immédiate de **7.7** combiné avec le théorème de Bernstein [Ro, 1.6] mentionné dans l'introduction. \square

7.9 Remarque: L'isomorphisme de catégories de **7.8** est compatible avec l'induction parabolique dans le sens suivant: remarquons d'abord que le théorème **7.7** et le corollaire **7.8** se généralisent facilement aux sous-groupes de Levi des groupes considérés ici. En effet, un tel sous-groupe de Levi est un produit direct de groupes de ce type, et les algèbres considérées sont donc des produits des algèbres associées aux facteurs.

Soit alors $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique de G tel que $P' \supseteq P$ et $M' \supseteq M$. Pour $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}^{M'}$ et $r \in R^{M'}(\mathcal{O})$, notons $T_{s_\alpha}^{M'}$ et $J_r^{M'}$ les opérateurs T_{s_α} et J_r définis relatifs à M' . On a une injection canonique de $\text{End}_{M'}(i_{P \cap M'}^{M'} E_{B_{\mathcal{O}}})$ dans $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ défini par le foncteur d'induction parabolique $i_{P'}^G$. On observe alors que cette inclusion correspond à l'inclusion naturelle des algèbres de Hecke avec paramètres respectives (ainsi que des algèbres de groupe fini). En effet, cette inclusion de $\text{End}_{M'}(i_{P \cap M'}^{M'} E_{B_{\mathcal{O}}})$ dans $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ envoie un opérateur $T_{s_\alpha}^{M'}$, $\alpha \in \Delta_{\mathcal{O}}^{M'}$, sur T_{s_α} et un opérateur $J_r^{M'}$, $r \in R^{M'}(\mathcal{O})$, sur J_r , la construction de ces opérateurs étant compatible avec l'induction parabolique (pour les opérateurs d'entrelacement voir [W]) et se faisant par rapport à un sous-groupe de Levi contenu dans M' .

Rappelons, comme déjà remarqué dans l'introduction, que l'isomorphisme de catégorie entre $\text{Rep}({}^W \mathcal{O})$ et la catégorie des $\text{End}_G(i_P^G E_{B_{\mathcal{O}}})$ -modules à droite est lui-aussi compatible avec l'induction parabolique [Ro, 2.4]. L'isomorphisme de catégorie **7.8** est donc compatible avec l'induction parabolique. On voit de même qu'il est compatible avec le foncteur de Jacquet.

REFERENCES

- [BD] J.N. Bernstein (rédigé par P. Deligne), *Le "centre" de Bernstein*, dans Représentations des groupes réductifs sur un corps local (J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras, eds.), Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.
- [BJ] D. Ban et C. Jantzen, *Degenerate principal series for even-orthogonal groups*, Representation Theory **7** (2003), 440–480.
- [BK] C. Bushnell et Ph. Kutzko, *Smooth representations of reductive p -adic groups: structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 582–634.
- [BZ] J. Bernstein et A. Zelevinsky, *Induced representations of reductive p -adic groups. I*, Ann. Sc. Écol. Norm. Sup. **t. 10** (1977), 441–472.
- [DKV] P. Deligne, D. Kazhdan et M.-F. Vignéras, *Représentations des algèbres centrales simples p -adiques*, dans Représentations des groupes réductifs sur un corps local (J.N. Bernstein, P. Deligne, D. Kazhdan, M.-F. Vignéras, eds.), Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.
- [H1] V. Heiermann, *Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p -adique*, Comment. Math. Helv. **76** (2001), 388–415.
- [H2] V. Heiermann, *Décomposition spectrale et représentations spéciales d'un groupe p -adique*, J. Inst. Math. Jussieu **3** (2004), 327–395.
- [He] G. Henniart, *La conjecture de Langlands locale numérique pour $\text{GL}(n)$* , Ann. Sc. Éc. Norm. Sup. **t. 21** (1988), 497–544.

- [HT] M. Harris et R. Taylor., *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties* (Annals of Mathematics Studies **151**), Princeton University Press, 2001.
- [L] G. Lusztig, *Affine Hecke algebras and their graded version*, J. of the AMS **2** (1989), 599–635.
- [M] C. Moeglin, *Multiplicité 1 dans les paquets d'Arthur*, dans "Proceedings of A Conference on Certain L-Functions on the occasion of Freydoon Shahidi's 60th Birthday, à paraître.
- [R] M. Reeder, *Non standard intertwining operators and the structure of unramified principal series representations*, Forum Math. **9** (1997), 457–516.
- [Ro] A. Roche, *Parabolic induction and the Bernstein decomposition*, Compositio Math. **134** (2002), 113–133.
- [Si] A. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p -adic groups* (Mathematical Notes No. **23**), Princeton University Press, 1979.
- [Sp] T. Springer, *Linear Algebraic Groups* (Progress in Mathematics, no. 9), Birkhäuser, 1998.
- [T] M. Tadic, *Induced representations of $GL(n, A)$ for p -adic division algebras A* , J. Reine Angew. Math. **405** (1990), 48–77.
- [W] J.-L. Waldspurger, *La formule de Plancherel pour les groupes p -adiques (d'après Harish-Chandra)*, J. Inst. Math. Jussieu **2** (2003), 235–333.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL, CAMPUS UNIVERSITAIRE
DES CÉZEAUX, 63177 AUBIÈRE CÉDEX, FRANCE
E-mail address: `heiermann@math.univ-bpclermont.fr`